

**UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I**

**THÈSE**

Présentée et soutenue publiquement le 14 Janvier 2009 par

**Cédric POZZOLINI**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I**

**Discipline : MÉCANIQUE**

**Option : MÉCANIQUE DES STRUCTURES**

**CONTINUATION DANS LES PROBLEMES  
DE CONTACT POUR DES PLAQUES  
EN FLEXION**

**JURY**

Président :

**M. Alain Haraux**

Directeur de Recherche, Université Pierre et Marie Curie

Directeur de Thèse :

**M. Alain Léger**

Directeur de recherche, LMA - CNRS

Rapporteurs :

**M. Alain Cimetière**

Professeur, Université de Poitiers - ENSMA

**M. Régis Monneau**

Professeur, ENPC

Examineurs :

**M. Frédéric Bonnans**

Professeur, Ecole Polytechnique - INRIA

**Mme. Raphaële Herbin**

Professeur, Université de Provence



जयत्

*À mes parents,  
avec tendresse et gratitude...*

**Résumé :** Avec les codes de calculs généralistes de la mécanique il est possible de suivre numériquement l'évolution de structures soumises à un chargement variable, avec des conditions aux bords classiques. Un des outils pour ces méthodes numériques (dites de continuation) est le théorème des fonctions implicites  $C^1$ . Mais dans le cas des problèmes de contact avec ou sans frottement cet outil ne s'applique plus, car la solution n'est en général plus dérivable par rapport aux paramètres du problème. La difficulté a été surmontée pour les opérateurs semi-linéaires d'ordre 2 (cas d'une membrane élastique en grandes déformations), mais pas encore pour les plaques. Pour cela, nous avons généralisé au bilaplacien le Théorème de stabilité de Schaeffer,

valable pour le laplacien. Ce qui fournit la dérivée de la frontière libre par rapport aux forces extérieures de classe  $C^\infty$ , si la frontière libre est  $C^\infty$ . Nous savons qu'il existe une dérivée par rapport aux forces de classe  $L^2$  de la solution pour le problème d'obstacle d'une poutre et d'une plaque élastique, avec des hypothèses sur la zone de contact assurant la polyédricité. Nous explorons l'analyse de sensibilité du problème de l'obstacle pour une poutre et une plaque linéaire, par des méthodes nouvelles d'analyse par perturbation au second ordre. Enfin nous expliquons comment ces résultats pourraient servir à comprendre la stabilité et la sensibilité des plaques de von Kármán.

**Mots-clefs :** frontière libre, problèmes de l'obstacle, membranes, plaques, stabilité, Théorème de Nash-Moser, sensibilité, sigma-terme de Kawasaki, suivi de courbes.

**Abstract :** There exist path following methods for mechanical structures submitted to varying loads, with classical boundary conditions. One of the tool required by these numerical methods (continuation) is the  $C^1$  implicit function theorem. But in the case of contact problems the derivative of the solution with respect to the load no longer exists in general. This technical difficulty has been overcome for an elastic membrane but we do not yet know how to extend these methods to the case of plates. It is known that there exist some derivative with respect to the forces to a solution for the obstacle problem for an elastic beam or a plate, in the polyhedric case. In order

to investigate these sensitivity questions we extended to the biharmonic operator the stability theorem of Schaeffer which has been established for the harmonic operator. This theorem gives the strong derivative of the free boundary with respect to the external forces, provided the free boundary is smooth. We explore the sensitivity analysis by second order perturbation analysis. We establish a kind of generalization of the previous sensitivity results to the case of linear beams and plates. Finally we discuss how to deal with the stability and sensitivity analysis in the case of the obstacle problem for von Kármán plates.

**Key-words :** Free boundary, obstacle problems, membrane, plate, stability, Nash-Moser Theorem, sensitivity, sigma-term of Kawasaki, path following methods.

---

## REMERCIEMENTS

Ma première pensée va naturellement à mon directeur de thèse, Alain Léger, pour la confiance qu'il m'a accordée. Je le remercie pour le sujet intéressant et stimulant qu'il m'a proposé, me faisant découvrir les problèmes non-linéaires à frontières libres et les bifurcations. Je lui suis profondément reconnaissant de la liberté qu'il m'a laissée et qui m'a permis d'explorer mes propres pistes tout en me faisant profiter de son expérience et de sa grande intuition.

Je suis particulièrement sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur A. Haraux en acceptant la charge de président du jury.

Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Monsieur R. Monneau pour ses précieuses remarques. Grâce à lui, ce manuscrit a beaucoup gagné en clarté et en lisibilité. Je le remercie pour le temps qu'il a consacré à mon travail et sa minutieuse application dans sa tâche de rapporteur.

Je remercie Monsieur A. Cimetière qui a mis autant de talent à rapporter mes activités de recherches. J'apprécie ses explications mécaniques rigoureuses et ses remarques pertinentes qu'il m'a offertes à chacune de nos rencontres.

Je veux également exprimer mes vifs remerciements Monsieur J.-F. Bonnans d'avoir accepté d'être membre du jury. J'ai beaucoup appris à chacun de nos fructueux échanges, c'est un privilège pour moi qu'il ait voulu s'intéresser à mon travail, et m'enseigner de belles mathématiques.

Je remercie aussi Madame R. Herbin d'avoir accepté de faire partir de mon jury de thèse.

Je souhaite aussi adresser un grand merci à Boris Kolev, qui m'a aidé à poser mes premiers pas dans le monde de la recherche, en m'offrant sa confiance en me guidant grâce à ses conseils avisés tant humains que mathématiques. Nos nombreuses discussions (méta-) méca-mathématiques ont été pour moi très enrichissantes.

Je n'oublie pas Patrick Ballard avec qui j'ai eu grand plaisir à collaborer, stimuler tant par ses encouragements que par ses nombreux contres-exemples. Je le remercie de m'avoir consacré du temps et de m'avoir initié aux problèmes de frottements.

Une bonne ambiance de travail étant un atout important pour la qualité de la recherche, je remercie toute l'équipe M.M.C. du L.M.A. J'ai vraiment eu de la chance d'être intégré à une équipe aussi agréable et sympathique, avec des conditions de travail idylliques. Merci à Fazia, Mathieu, Marie-Christine, François, Ange, Carole, Nazihe, Lama pour leurs attentions de tous les instants . . .

Ce travail n'aurait sans doute pas abouti sans le soutien de ma famille et de mes amis. J'ai une pensée émue toute spéciale pour ma mère et mon père qui ont toujours été présents et prêts à se plier en quatre pour m'aider : merci de tout coeur.

Merci à Adrien, Jianguo, Pierrick, Pierre, Emilien, Heimata, Nathalie, Vanessa et Coralie qui ont tant de fois écouté mes plaintes, comme mes interminables monologues, votre soutien inconditionnel et vos constants témoignages d'amitiés m'ont été d'un très grand secours.

Pour finir, je ne pourrai jamais décrire ma reconnaissance à Patrick Poulain (et à travers lui à D.K.) qui a toujours su trouver les mots, avec patience et gentillesse, en m'accompagnant pas à pas pour développer un esprit clair et lucide et faire de justes choix.

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>9</b>
Le modèle du problème de l'obstacle de la membrane sous l'hypothèse des petites perturbations . . . . .	12
Le problème de l'obstacle pour une plaque linéaire en flexion . . . . .	15
Et en grandes déformations. . . . .	19
<b>1 RAPPELS DE THEORIE DES STRUCTURES</b>	<b>25</b>
1.1 Plaquas en petites et grandes déformations . . . . .	25
1.1.1 Modèle des plaques linéaires . . . . .	25
1.1.2 Modèle des plaques de von Kármán . . . . .	29
1.2 Modèle des membranes linéaires et non-linéaires . . . . .	34
1.3 Modèle des poutres linéaires et non-linéaires . . . . .	35
<b>2 LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE MEMBRANE EN PETITES DEFORMATIONS</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 La formulation faible . . . . .	38
2.3 Régularité de la solution . . . . .	40
2.3.1 Quelques résultats classiques . . . . .	40
2.3.2 Sur la régularité de $\partial\Omega$ . . . . .	43
2.3.3 Réaction sur la zone de contact . . . . .	44
2.3.4 Equation d'Euler-Lagrange & Formulation Forte . . . . .	45
2.4 Topologie et mesure de l'ensemble de coïncidence . . . . .	46
2.4.1 Nécessité d'une hypothèse de non-dégénérescence . . . . .	46
2.4.2 Mesure de la frontière libre . . . . .	46
2.4.3 Principe du maximum et topologie de l'ensemble de coïncidence . . . . .	49
2.5 Géométrie de la frontière libre . . . . .	50
2.5.1 Transformation de l'hodographe-Legendre . . . . .	50
2.5.2 Points singuliers et réguliers de la frontière libre . . . . .	51
2.5.2.1 Exemples de singularités . . . . .	51
2.5.2.2 Conjecture sur la régularité générique de la frontière libre . . . . .	54
2.5.2.3 L'exemple historique de Lewy-Stampacchia - 1969 [89] . . . . .	54
2.5.3 Les « blow-up » & les Théorèmes de L. Caffarelli . . . . .	55
2.5.3.1 Notions et résultats classiques sur les « blow-up » . . . . .	55
2.5.3.2 Théorème du critère d'extrême finesse . . . . .	60
2.5.3.3 Sur le nombre de points singuliers de la frontière libre . . . . .	60
2.6 Réponses à la conjecture de Schaeffer en dimension 2 . . . . .	63
2.6.1 Une première réponse de R. MONNEAU . . . . .	63
2.6.2 Variante de la réponse de R. Monneau . . . . .	63

---

2.6.2.1	Énoncé du Théorème et le principe de sa Démonstration . .	64
2.6.2.2	Preuve de l'Assertion 0 . . . . .	65
2.6.2.3	Preuve de l'Assertion 3 : . . . . .	67
2.6.2.4	Preuve de l'Assertion 2 : . . . . .	68
2.6.2.5	Preuve de l'Assertion 1 : . . . . .	69
2.7	Stabilité de la zone de contact au sens de D.G. Schaeffer . . . . .	73
2.7.1	L'approche géométrique par le théorème des fonctions implicites . . .	73
2.7.1.1	Cadre . . . . .	73
2.7.1.2	Stratégie générale de la Preuve selon [117] (section 2. pages 37-38) . . . . .	74
2.7.1.3	Idée de la Preuve . . . . .	75
2.7.1.4	Métrique, courbures et différentielles sur la frontière libre . .	77
2.7.1.5	Les Conditions de Nash-Moser via le Théorème 2.7.2 . . . .	80
2.7.2	Stabilité locale : généralisation du théorème de Schaeffer . . . . .	81
2.8	Continuation pour le problème de l'obstacle pour une membrane . . . . .	83
2.8.1	Présentation du cadre et des objectifs . . . . .	83
2.8.2	Dérivée conique pour le problème d'obstacle (2.2) . . . . .	84
2.8.3	Evolution de la zone de contact en fonction du chargement et dérivée	85
2.8.3.1	Exemple 1 : « obstacle plat » . . . . .	85
2.8.3.2	Exemple 2 : « obstacle pointu » . . . . .	86
2.8.3.3	Exemple 3 : « obstacle à deux bosses » . . . . .	88
2.8.3.4	Exemple 4 : « contact affleurant sur un disque » . . . . .	90
<b>3</b>	<b>LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE PLAQUE EN PETITES DE-</b>	
	<b>FORMATIONS : RESULTATS GEOMETRIQUES DE STABILITE</b>	<b>91</b>
3.1	Présentation du problème et premiers résultats . . . . .	92
3.1.1	Cadre & Hypothèses . . . . .	92
3.1.2	Formulations faibles primales : Existence, Unicité, caractère bien posé	92
3.1.3	Une absence à remarquer... . . . .	94
3.1.4	Mesure et zone de contact . . . . .	96
3.2	Régularité de la solution $U$ . . . . .	97
3.2.1	Régularité intérieure de $U$ . . . . .	97
3.2.2	Sur la masse totale . . . . .	101
3.2.3	L'affaire de la réaction ponctuelle ... . . . .	103
3.2.4	Régularité de $U$ au voisinage de $\partial\Omega$ . . . . .	104
3.3	Formulation forte . . . . .	105
3.4	Topologie et Géométrie de l'ensemble de coïncidence . . . . .	106
3.4.1	Connexité de $\mathcal{N}$ . . . . .	106
3.4.2	Sur la géométrie de la frontière libre . . . . .	107
3.5	Stabilité au sens d'Adams pour le bilaplacien . . . . .	109
3.5.1	Stabilité $\mathbb{H}_{loc}^3$ pour (3.4) . . . . .	110
3.5.2	Continuité au sens de la norme $\mathbb{H}^3$ . . . . .	110
3.6	Théorème de stabilité « à la Schaeffer » pour le bilaplacien . . . . .	114
3.6.1	Théorème de stabilité : une première version . . . . .	114
3.6.1.1	Traduction en équation fonctionnelle . . . . .	115
3.6.1.2	Métrique, courbure et différentielles sur la frontière libre . .	116
3.6.1.3	Les conditions de Nash-Moser . . . . .	121
3.6.1.4	Inégalités Utiles . . . . .	122
3.6.1.5	Démonstrations des Assertions 2 à 5 . . . . .	127

---

---

3.6.2	Théorème de stabilité : commentaires et extensions . . . . .	131
<b>4</b>	<b>LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE PLAQUE EN PETITES DEFORMATIONS : ETUDE DE SENSIBILITE</b>	<b>135</b>
4.1	Résultats de différentiabilité en présence d'obstacle pour une poutre en flexion	136
4.1.1	Cas d'une poutre en appui simple . . . . .	136
4.1.2	Cas d'une poutre encastrée au dessus d'un obstacle lisse . . . . .	139
4.2	Quelques exemples de l'évolution de la zone de contact en fonction du chargement . . . . .	141
4.2.1	Un cas de non-différentiabilité du projecteur métrique de $\mathbb{H}^2$ . . . . .	141
4.2.2	« Un delta qui bouge ! » . . . . .	142
4.2.3	Poutre en flexion : instabilité pour un point de contact isolé . . . . .	143
4.2.4	Stabilité et instabilité de la zone de contact pour une plaque circulaire	147
4.3	Polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ . . . . .	151
4.4	Espaces tangents d'ordre 2 et $\sigma$ -terme . . . . .	153
4.4.1	Définitions et caractérisations des ensembles tangents à l'ordre 2 . . . . .	153
4.4.2	Estimations supérieures et inférieures à l'ordre 2 (cas convexe) . . . . .	158
4.5	Etude de sensibilité à l'ordre 2 dans le problème d'obstacle pour une poutre	163
4.6	Etude de sensibilité dans le problème de l'obstacle pour une plaque . . . . .	170
<b>5</b>	<b>LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE PLAQUE DE VON KARMAN : PERSPECTIVES</b>	<b>177</b>
5.1	Formulation variationnelle du problème de contact . . . . .	178
5.2	Flambage en théorie unilatérale des plaques de Von Karman . . . . .	179
5.2.1	Résultats de bifurcations locales . . . . .	179
5.2.2	Résultats de bifurcations globales . . . . .	182
5.2.3	Régularité des solutions . . . . .	183
5.3	Stabilité géométrique pour une poutre en grandes déformations - Application aux bifurcations . . . . .	184
5.4	Perspectives . . . . .	186
	<b>Bibliographie</b>	<b>188</b>
	<b>Annexes</b>	<b>199</b>
<b>A</b>	<b>Douceur &amp; Théorème de Nash-Moser</b>	<b>199</b>
A.0.1	Cadre . . . . .	199
A.0.2	Énoncé des théorèmes . . . . .	201
<b>B</b>	<b>Différentiabilité d'un projecteur sur un convexe polyédrique d'un espace de Hilbert</b>	<b>203</b>
<b>C</b>	<b>Applications lipschiziennes &amp; Propriété de Radon-Nikodym (PRN)</b>	<b>207</b>
<b>D</b>	<b>Formule de Levi-Civita &amp; Opérateur de Laplace-Beltrami</b>	<b>209</b>
<b>E</b>	<b>Preuve de l'estimation de Schauder du Lemme 3.6.3</b>	<b>211</b>

---

---

<b>F</b>	<b>Bifurcations d'inéquations variationnelles dans les espaces de Hilbert</b>	<b>215</b>
F.1	Théorème d'inversion locale & points réguliers . . . . .	215
F.2	Position du problème dans le cas unilatéral . . . . .	216
F.3	Solution équation, solution inéquation pure & point de transition . . . . .	217
F.4	Résultats de bifurcations globales à la Crandall-Rabinowitz . . . . .	217
<b>Annexes</b>		<b>196</b>



# INTRODUCTION

« Cherchons ce qu'il y a de mieux à faire, et non ce qui est le plus en usage. » Sénèque

« Une erreur n'est pas une vérité parce qu'elle est partagée par beaucoup de gens, tout comme une vérité n'est pas fausse parce qu'elle est émise par un seul individu. » Gandhi

Les membranes, les plaques et plus généralement les coques minces apparaissent très fréquemment autour de nous sous diverses formes comme par exemple les films minces, les toiles, les membranes biologiques, les tôles, les plaques continentales, les nanotubes... Cela tient en partie à leur bonne résistance mécanique, leur souplesse dans le domaine élastique, couplées à leur légèreté. Pourtant, malgré plus d'un siècle d'études des comportements des structures minces élastiques, encore de nombreuses questions sont ouvertes, notamment du point de vue des non-linéarités provenant du contact, du frottement, et des grandes déformations. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps. Il est évident que la prise en compte du contact peut jouer un rôle central dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, le flambage etc. En dépit du rôle fondamental des efforts de contact en mécanique, ils sont rarement pris en considération dans l'analyse des structures. En effet modéliser des phénomènes de contact pose de sérieuses difficultés : conceptuelles, mathématiques et informatiques qui sont bien plus complexes que celles qui proviennent de la mécanique des structures linéaires classiques. L'écriture des phénomènes de contact impose la prise en compte du signe de la réaction entre les corps, et conduit donc à des problèmes non-linéaires. Ils appartiennent à la grande famille des problèmes mathématiques à *frontière libre*, puisque la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue ainsi que les conditions de bord sur cette surface. La prise en compte du frottement et/ou des grandes déformations dans les problèmes de contact conduisent à des solutions multiples et constituent encore des questions ouvertes. Néanmoins, il y a des formulations spécifiques de certaines classes de problèmes de contact dans lesquelles ces difficultés classiques sont réduites au minimum et qui fournissent la base pour des méthodes d'analyse élégantes.

Rappelons que les phénomènes de bifurcations concernent la question de l'existence et du comportement des solutions de familles de problèmes non-linéaires paramétrés. La théorie des bifurcations s'est développée depuis les travaux de L. Euler et D. Bernoulli sur l'équilibre des barres élastiques, au XVIII<sup>ème</sup> siècle. Elle s'est poursuivie par les études de H. Poincaré sur la mécanique céleste, et a beaucoup progressé au XX<sup>ème</sup> siècle sous l'influence de l'école Russe, avec l'utilisation des techniques topologiques de M.A. KRASNOSEL'SKII [83]. Le but de cette thèse est de contribuer à la compréhension de la prise en compte du contact dans les problèmes de plaques du point de vue de la stabilité, de la sensibilité et de la continuation dans l'optique d'appréhender à terme le phénomène de bifurcation dans ce contexte unilatéral des équations de von Kármán. La motivation initiale pour l'étude de ce type de problèmes provient du désir de généraliser à des inéquations les recherches menées sur les bifurcations des équations des structures dans le cas bilatéral. En effet, actuellement la structure de l'en-

semble des solutions du problème de l'obstacle pour les coques élastiques minces en grandes déformations est encore mal connue, et les traitements numériques de suivi de courbes proposés dans certains codes de calculs ne sont pas justifiés mathématiquement. Soulignons que nous nous restreignons au cas statique, puisque l'aspect dynamique en présence de contact conduit à la question de la prise en compte de phénomènes de *chocs*, qui posent pour le moment de très grosses difficultés.

Le modèle linéaire de plaque qui nous sert de base est celui publié en 1892 par A. LOVE [94] fournissant les équations d'équilibre sous l'hypothèse des *déplacements infinitésimaux* (hypothèse des petites perturbations : HPP). Cette théorie fondée sur les hypothèses de G. KIRCHHOFF s'inspire de celle des poutres d'Euler-Bernoulli. Il s'agit d'une description simple de la déflexion d'une plaque élastique mince. Ainsi pour une plaque occupant au repos un domaine borné plan  $\Omega$ , encastrée sur son bord, le déplacement normal  $U$  (i.e. la *flèche*) sous un chargement  $F$ , orthogonal au plan moyen, vérifie :

$$\begin{cases} D\Delta^2 U = F & \text{dans } \Omega, \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

L'opérateur  $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$  désigne le bilaplacien qui est d'ordre 4. La constante  $D$  s'appelle le coefficient de rigidité à la flexion. Le problème aux limites (1) est découpé de celui donnant les composantes tangentielles du déplacement. Bien entendu (1) modélise des petits déplacements et se révèle insuffisant pour décrire la flexion forte d'une plaque élastique. C'est pour prendre en compte les non-linéarités géométriques induites par les *déplacements modérés* que l'ingénieur hongrois T. VON KÁRMÁN [126] proposa en 1910 le modèle suivant que nous écrivons dans un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  :

Trouver  $(U, \chi)$  tels que :

$$\begin{cases} D\Delta^2 U = [\Theta - \chi; U] + F & \text{dans } \Omega, \\ \Delta^2 \chi = -[U; U] & \text{dans } \Omega, \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \chi = \partial_n \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Où pour tout  $U, V \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , le crochet de Monge-Ampère  $[U; V]$  est défini par :

$$[U; V] = \partial_x^2 U \partial_y^2 V + \partial_y^2 U \partial_x^2 V - 2\partial_{xy}^2 U \partial_{xy}^2 V$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles est utilisé pour modéliser le déplacement d'une plaque sous l'effet d'une force transversale  $F$  exercée sur le domaine  $\Omega$  ; La variable  $U$  représente la déflexion (déplacement vertical) tandis que la variable  $\chi$  indique la fonction d'Airy qui traduit les variations de contraintes membranaires lors du fléchissement de la plaque, et le terme  $\Theta$  est la résultante des efforts intérieurs sous l'actions des efforts appliqués aux bords. La condition aux limites  $U = \partial_n U = 0$  sur  $\partial\Omega$  correspond au cas d'une plaque encastrée sur son bord. L'étude théorique et numérique des équations de von Kármán a fait l'objet de plusieurs publications. Leur justification théorique grâce à l'analyse asymptotique des équations de l'élasticité tridimensionnelle date de 1980 et est due à P.G. CIARLET [34]. Dans [13], M.S. BERGER établit les propriétés structurales des équations de

von Kármán. La théorie des bifurcations qui permet de traduire les phénomènes de flambement, a été menée par M.S. BERGER & P.C. FIFE [13], [14] puis par P.G. CIARLET & P. RABIER [35] sur la base des théorèmes de Crandall-Rabinowitz et du classique théorème des fonctions implicites  $C^1$ . Mais dans le cas des problèmes de contact avec ou sans frottement, cet outil fondamental ne s'applique plus car les solutions ne sont en général plus dérivables par rapports aux données du problème. Pour avancer dans cette direction, il a été fait appel à la *Théorie des Perturbations* dont un des champs de prospection est justement la sensibilité des problèmes variationnels. Si  $\Omega$  est un domaine borné *simplement connexe*<sup>1</sup> du plan le problème de l'obstacle *sans frottement* pour une plaque de von Kármán s'écrit [96], [57] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = [\Theta + \chi; U] + F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ \Delta^2 \chi = -[U; U] & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \chi = \partial_n \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{array} \right. \quad (3)$$

où  $\mu(F)$  représente la réaction de l'obstacle rigide  $\psi$  au dessus duquel est placée la plaque. La dernière condition de (3) (dite de complémentarité) impose la non pénétration de la plaque dans l'obstacle avec  $\mu(F)$  orthogonale à  $\psi$ , puisque le frottement est négligé<sup>2</sup>. En observant que le système d'équations de von Kármán n'est pas fortement couplé, et en utilisant la projection orthogonale sur le convexe  $\mathbb{K}_\psi$  des déplacements admissibles de (3), on peut exprimer l'inéquation variationnelle gérant l'équilibre du problème contraint (3) comme l'équation de « type point fixe » suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{K}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)) \end{array} \right.$$

avec  $\mathbf{B}$  un certain opérateur non-linéaire<sup>3</sup>.

Ce qui montre que les propriétés de différentiabilité des solutions (3) sont intimement liées à celle du projecteur orthogonal, pour un certain produit scalaire sur  $\mathbb{H}^2$ . Or en général, les opérateurs de projection sur des ensembles non réguliers ne sont pas différentiables au sens de Fréchet. La difficulté a été surmontée pour les problèmes d'obstacle pour des membranes en petites et grandes déformations, et plus généralement pour des opérateurs elliptiques d'ordre deux, mais pas encore pour les plaques. La théorie des bifurcations décrivant le flambement de structures dans le cas bilatéral se formule mathématiquement en termes de problèmes aux valeurs propres pour des équations aux dérivées partielles. Dans le cas unilatéral, il s'agit donc de rechercher des valeurs propres non plus sur un espace vectoriel, mais sur un convexe. Grâce à des arguments d'invariance par homotopie du *degré topologique*, des informations qualitatives sont disponibles quant à l'allure des diagrammes de bifurcation pour des plaques de von Kármán en présence de contact unilatéral [72], [86], mais elles ne sont ni constructives ni susceptibles de fournir des méthodes numériques de suivi de courbes.

<sup>1</sup>Cette hypothèse est nécessaire pour définir la fonction d'Airy  $\chi$ .

<sup>2</sup> $0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0$  sur  $\overline{\Omega}$  signifie que  $(U - \psi)\mu(F) = 0$ ,  $(U - \psi) \geq 0$  et  $\mu(F) \geq 0$  sur  $\overline{\Omega}$ .

<sup>3</sup>avec  $\mathbf{B}(U, \lambda) = -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \tilde{F}$ , tous les termes étant décrits au Chapitre 1.

Le problème (3) met en concurrence deux types de non-linéarités : celle de l'obstacle traduite par une inégalité et celles des grandes déformations traduite par le crochet de Monge-Ampère. Le but ultime étant de savoir tracer les diagrammes de bifurcations associés à (3). Comme le rôle de la non-linéarité géométrique seule a déjà été bien compris, il nous est apparu raisonnable de commencer à nous intéresser au cas des petites déformations (théorie linéarisée) en présence d'obstacle avant de nous attaquer au problème général. C'est ce choix qui justifie l'organisation des chapitres de ce manuscrit de thèse. Nous nous focaliserons sur l'étude des propriétés de stabilité au **Chapitre 3** et de sensibilité du problème de l'obstacle pour une plaque linéaire au **Chapitre 4**, avant d'offrir, au **Chapitre 5**, un panorama de perspectives pour le problème (3) en soulignant les points délicats, et en faisant le parallèle avec ce qui est connu concernant le problème de l'obstacle pour une membrane en grandes déformations. Afin de faciliter la compréhension, nous présenterons de façon détaillée, au **Chapitre 2**, le problème de l'obstacle pour une membrane en petites déformations. Mais avant tout nous commencerons par décrire brièvement les modèles mécaniques utilisés au **Chapitre 1**.

## 1. Le modèle du problème de l'obstacle de la membrane sous l'hypothèse des petites perturbations

**Formulation du problème** On considère une membrane qui, en l'absence de force, est plane et occupe un domaine borné du plan. On place au-dessous de cette membrane un obstacle rigide représenté par le graphe d'une fonction  $\psi$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . Le déplacement vertical de la membrane est représenté par le graphe d'une fonction  $U$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On cherche alors la position d'équilibre que prend la membrane soumise à une force  $F$  perpendiculaire au plan de  $\Omega$ , sous la contrainte de non pénétration  $U \geq \psi$  sur  $\bar{\Omega}$  (voir figure 1). Plus précisément, nous gardons les termes de membranes du problème (3) sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP) :

$$\begin{cases} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \end{cases} \quad (4)$$

D'après [90] nous savons que (4) admet une unique solution pour tout  $F \in L^2(\Omega)$ . Dans le but d'explicitier le système d'équations locales que vérifie  $U$ , nous définissons la zone de contact par

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

Nous allons voir qu'il est difficile mais crucial de comprendre les propriétés de cet ensemble puisqu'il détermine indirectement  $U$ . *A priori*, si  $F \in L^2(\Omega)$  la solution  $U \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  n'admet qu'un représentant quasi-continu (non nécessairement continu) ce qui ne permet de définir la zone de contact qu'à un ensemble de 1-capacité<sup>4</sup> nulle près. Mais puisque nous savons par ailleurs que  $U \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , alors elle est continue et l'ensemble de contact est défini point par point (puisque  $\dim \Omega \leq 2$ ). Néanmoins, nous ne disposons pour le moment d'aucune information sur la régularité de la zone de contact.

**Régularité** Contrairement à la théorie des Equations aux Dérivées Partielles elliptiques, dans les problèmes d'obstacles la solution n'est pas de classe  $C^\infty$  si les données le sont. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une membrane à bord lisse  $\partial\Omega \in C^\infty$  au-dessus d'un

---

<sup>4</sup> $\text{Cap}_1(E) := \inf_{v \in \mathbb{K}(E)} \int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega$ , où  $\mathbb{K}(E) := \{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) / v \geq 1 \text{ sur } E\}$  pour tout compact  $E \subset \Omega$ .

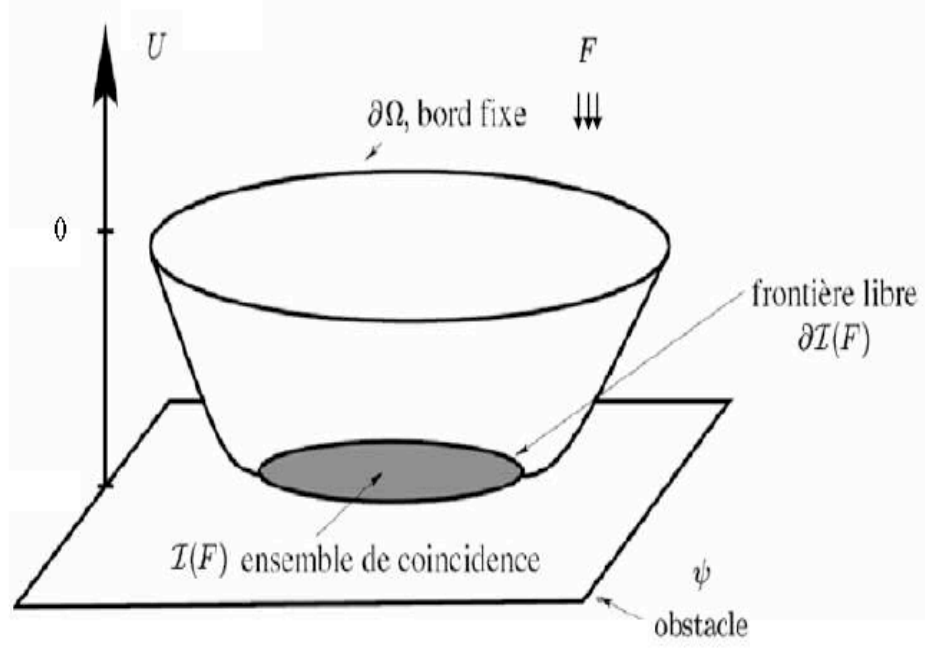


FIG. 1 – Graphe d’une solution au problème d’obstacle pour la membrane élastique

obstacle plan  $\psi \equiv -1$  soumise à un champ de forces constant  $F \equiv 1$ . Supposons que le bord de la zone contact soit également lisse, ainsi  $\Delta U = 0$  sur  $\mathcal{I}(F)$ , tandis que  $\Delta U = 1$  sur le complémentaire ; ceci implique en particulier que  $U \notin C^2(\Omega)$  !

Néanmoins, un Théorème de J. FREHSE assure que  $U$  est  $C^{1,1}(\Omega)$ , pourvu que  $F \in C^{0,\alpha}$ . Ce qui conduit à écrire, au moins formellement, les équations d’Euler-Lagrange que doit vérifier  $U$  :

$$\begin{cases} \Delta U = F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U \geq \psi & \text{sur } \Omega. \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U = \psi & \text{sur } \mathcal{I}(F) \\ \nabla U = \nabla \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{cases} \quad (5)$$

Dès lors en supposant  $F$  suffisamment régulière, on peut s’intéresser à la géométrie de la zone de contact. Nous pouvons remarquer qu’une condition surabondante apparaît naturellement sur la frontière libre  $\partial\mathcal{I}(F)$ , alors que celle-ci est inconnue et donc que nous ne pouvons pas légitimer *a priori* l’utilisation de la normale à la zone de contact.

**Panorama géométrique** Le caractère surdéterminé imposé par les conditions de Dirichlet et de Neumann sur la frontière libre recèle des informations précieuses sur la régularité de cette frontière qu’il convient d’étudier à partir de la formulation faible. Cependant il est important d’observer que sans hypothèse sur la nature des forces appliquées, la zone de contact peut être égale à n’importe quel compact du plan, même avec des données analytiques. C’est ce qui a motivé la recherche d’une hypothèse de non dégénérescence<sup>5</sup> dans le but de pouvoir

<sup>5</sup>Cette hypothèse de non dégénérescence s’écrit  $F^0 - \Delta\psi > 0$  sur  $\mathcal{I}(F^0)$ .

explorer la géométrie de la frontière libre. L. CAFFARELLI a réussi à montrer que sous cette hypothèse la mesure de Hausdorff de la frontière libre est localement finie. La preuve est basée sur un lemme de non dégénérescence qui repose sur le principe du maximum. Cela permet alors d'établir une propriété dite « de la petite boule positive », affirmant grosso modo que tout point du complémentaire de la zone de contact est le centre d'une petite boule qui n'intersecte pas la zone de contact. Ceci interdit alors à la frontière libre d'être fractale. Rappelons que nous adoptons la définition suivante : un point  $X^0$  de la frontière libre  $\partial\mathcal{I}(F)$  est *régulier* si et seulement si la frontière libre est localement une  $C^1$ -courbe au voisinage de  $X^0$ . Il est dit singulier dans le cas contraire. Un résultat de D. KINDERLEHNER & L. NIREMBERG [81] permet de montrer que dans ce cas la frontière est aussi lisse que le permettent les données (*transformation de l'hodographe*). Mais à la même époque, D. SCHAEFFER [119] exhiba des exemples de situations générant des « *cusps* » sur la frontière libre, et ce même avec des données analytiques, (voir figure 2.3.2).

Puisque les singularités sont inévitables, il est intéressant d'en savoir plus sur leur nature et leur rareté. L. CAFFARELLI [27] caractérisa les points de la frontière libre par les limites de « blow-up » (ou limites d'explosions). Cette méthode permet d'obtenir par un argument indirect des informations sur le comportement de la solution en un point de la frontière libre sans avoir aucune connaissance directe sur celle-ci. L. CAFFARELLI [28] montra que les points singuliers ne se manifestent que de façon isolée sur les différentes composantes connexes de la zone de contact, sous la forme de parties d'épaisseur infiniment petite (Théorème du critère d'extrême finesse). Il prouva d'autre part que l'ensemble des points singuliers forme un ensemble fermé (pour la topologie de la frontière libre).

Ces considérations sur la régularité de la frontière libre nous conduisent à mentionner la Conjecture de Schaeffer [116] qui stipule que :

*« toute solution faible du problème de l'obstacle harmonique en dimension  $n$  obtenue génériquement est une solution forte ; i.e. génériquement la zone de contact est lisse si les données le sont. »*

En 2003, elle a été partiellement démontrée (en 2D) par R. MONNEAU [99], pour des chargements constants. Plus précisément, il établit que pour une famille de problèmes d'obstacle harmoniques (en 2D) continûment indexée par un paramètre  $\lambda > 0$ , la frontière libre est analytique pour presque toute constante  $\lambda$ . Sa preuve est fondée sur une nouvelle formule de monotonie, du type de celle développée par G.S. WEISS [127], pour les points singuliers de la frontière libre. Enfin, il donna une formule de Taylor à l'ordre 2 pour les points singuliers et des estimations de leur nombre sur chaque composante connexe. Nous réécrivons cette preuve dans le cas un peu plus général d'une force de classe  $C^\infty$ .

**Stabilité géométrique au sens de Schaeffer pour le laplacien** En 1975, D. SCHAEFFER [117] démontra un théorème de stabilité pour le problème (4). Pour des données lisses et sous une hypothèse de non dégénérescence<sup>6</sup>, ce théorème affirme que si pour une force  $F^0$  la zone de contact correspondante est une surface lisse  $\mathcal{I}(F^0)$ , alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^0$  dans l'espace des fonctions de classes  $C^\infty$  la zone de contact correspondante  $\mathcal{I}(F)$  est une surface lisse difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^0)$ . Sa preuve est conduite grâce à un théorème des fonctions implicites de Nash-Moser [64], [125] dans l'espace de Fréchet des fonctions de classes  $C^\infty$ , appliqué à la condition surabondante qui apparaît dans les équations d'Euler-Lagrange. Il s'agit d'un théorème de stabilité par perturbations, qui ne renseigne pas sur l'existence éventuelle d'une dérivée du champ de déplacements par rapport au champ de forces. Ce théorème constitue une confirmation partielle de la précédente conjecture.

<sup>6</sup>Cette hypothèse de non dégénérescence interdit que l'ensemble de coïncidence soit égal à n'importe quel compact du plan ; elle s'écrit  $F^0 > 0$  sur  $\mathcal{I}(F^0)$  pour un obstacle plat.



**Comment dériver une inégalité ?** L'analyse de sensibilité pour le problème d'équilibre de la membrane avec obstacle contrôlée par une force<sup>7</sup> a été discuté par F. MIGNOT [95] et A. HARAUX [62]. Ils firent un pas décisif, en étudiant l'existence d'une dérivée conique pour projecteur sur un convexe d'un espace de Hilbert. En observant que la solution du problème sous contrainte d'inégalité (4) est la projection sur le convexe correspondant de la solution du problème sans contrainte associé (i.e. bilatéral), cela ramène l'étude de sensibilité par rapport au paramètre  $F$  à celle du projecteur métrique sur le convexe des déplacements cinématiquement admissibles  $\mathbb{K}_\psi$ . Grâce au concept de convexe *polyédrique*, la dérivée directionnelle fut obtenue, fournissant un des outils manquants pour la continuation dans les inéquations variationnelles elliptiques d'ordre 2.

**Dérivabilité presque partout et Conjecture de Schaeffer** D'après [62], nous savons que  $F \mapsto U(F)$  est toujours directionnellement différentiable en  $F \in L^2(\Omega)$  dans la direction  $H \in L^2(\Omega)$ , et que cette dérivée est égale à la projection de  $H$  sur le cône critique associé à  $U(F)$ . De plus cette dérivée est une dérivée directionnelle au sens de Gâteaux si et seulement si le cône critique associé à  $U(F)$  est un espace vectoriel. Il est également connu que toute application lipschitzienne entre espaces de Hilbert est dérivable presque partout [95]. De fait, nous sommes assurés que pour tout champ de forces  $F \in L^2(\Omega)$  et avec  $\lambda > 0$ , l'application  $\lambda \mapsto U(\lambda F)$  est presque partout Fréchet-dérivable. Dans l'approche numérique proposée dans [46], il est explicitement supposé que l'ensemble de coïncidence « n'est pas trop pathologique » et que le cône critique est un espace vectoriel, ce qui revient à demander que le contact soit franc. Néanmoins, nous savons que  $\mathcal{I}(\lambda F)$  peut être très irrégulier et que le contact peut être affleurant. Or le théorème de stabilité de Schaeffer ne renseigne pas à ce sujet, et la réponse de R. Monneau à la conjecture de Schaeffer ne concerne pas des forces  $F \in L^2(\Omega)$ . Donc nous ne pouvons pas conclure en général sur la régularité de la zone de contact, bien que dans les applications numériques elle soit considérée comme un compact parfait à bord lisse par morceaux [76], [45], [46].

## 2. Le problème de l'obstacle pour une plaque linéaire en flexion

**Formulation du problème** La recherche de la position d'équilibre d'une plaque linéairement élastique en petites déformations, occupant au repos un domaine borné du plan  $\Omega$ , encastrée sur son bord, alors qu'elle est placée au dessus d'un obstacle rigide  $\psi$ , et soumise à un champ de forces  $F$  induisant une réaction  $\mu(F)$ , conduit à la formulation suivante :

$$\begin{cases} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6)$$

Nous renvoyons aux travaux de J.C. PAUMIER [101] et ceux de A. LÉGER & B. MIARA [85], pour une justification asymptotique de ce modèle de plaques en présence de contact. Le théorème de Lions-Stampacchia assure qu'il existe une unique solution à (6). Ici le cadre fonctionnel adapté est celui de l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ , qui a l'avantage de s'injecter (pour  $\Omega$  de dimension 2) dans l'espace des fonctions continues  $C^0(\Omega)$ . Ainsi la définition de la zone de contact ne demande plus le recours aux capacités. Cependant de par ses spécificités ce problème va se révéler bien plus ardu que celui des membranes, ce qui explique que la littérature soit pour celui-ci bien moins abondante.

<sup>7</sup>c'est à dire la question de la dérivabilité de la fonction  $U$  par rapport à  $F$ .

**Régularité** Considérons l'exemple d'une plaque à bord lisse  $\partial\Omega \in C^\infty$  au dessus d'un obstacle plan  $\psi \equiv -1$  soumise à un champ de forces constant  $F \equiv -1$ . Supposons que le bord de la zone contact soit également lisse, du coup  $-\Delta^2 U = 0$  sur  $\mathcal{I}(F)$ , tandis que  $\Delta^2 U = 1$  sur le complémentaire ; ceci implique en particulier que  $U \notin C^4(\Omega)$  !

En 1983, B. SCHILD [120] assura que la solution  $U$  de (6) est en fait  $C^2(\Omega)$ , pourvu que la force soit  $L^2(\Omega)$ , et l'obstacle  $\psi \in C^2(\Omega)$ , avec  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ . Du coup, si la frontière libre est suffisamment régulière, la solution  $U$  satisfait le système de relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} D\Delta^2 U & = & F \quad \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{I}(F) \\ U & = & \psi \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ \partial_n U & = & \partial_n \psi \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ D^2 U & \in & C^0(\overline{\Omega}). \end{array} \right. \quad (7)$$

Le contact entre la plaque et l'obstacle est d'ordre 1 (tangent), il peut être d'ordre 2 (racord des courbures) sur les parties de la frontière libre qui bordent des parties de la zone de contact d'intérieur non vide.

Contrairement au cas de la membrane, la rigidité de plaque implique que la réaction de l'obstacle soit une mesure signée singulière pouvant charger les « courbes ». En particulier  $U \notin \mathbb{H}^4(\Omega)$ , car  $U \notin C^{2,\alpha}(\Omega)$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ . L. CAFFARELLI a fait observer que le résultat de régularité ci-dessus est optimal, car en particulier  $U \notin \mathbb{W}^{3,p}(\Omega)$ , pour  $F \in L^p(\Omega)$ . Nous verrons, que si le contact est franc entre la plaque et l'obstacle, un effort tranchant apparaît au bord de la zone de contact. Nous pouvons détailler aisément le cas d'un poutre en flexion<sup>8</sup>, encastrée à ses extrémités, placée au-dessus d'un obstacle plan  $\psi \equiv -1$  soumise à un chargement constant  $F \equiv -\lambda < 0$  suffisamment intense pour que la zone de contact soit un segment  $[-r, +r]$ . Alors, en faisant un développement de Taylor de la solution en un point  $x$  de la partie décollée  $[+r, +1[$  nous obtenons, puisque le contact est d'ordre 2,

$$0 \leq (U - \psi)(x) = \frac{(x - r)^3}{3!} U^{(3)}(r) + \frac{(x - r)^4}{4!} U^{(4)}(r) + o((x - r)^4)$$

or en prenant la dérivée quatrième à droite de  $U$  (qui est lisse sur la partie décollée) égale à  $U^{(4)} = -\lambda < 0$ , il vient immédiatement que la dérivée troisième à droite  $U^{(3)}(r) > 0$ . Ceci atteste de la présence d'une réaction localisée au bord de la zone de contact, donc au sens des distributions :  $D^4 U(r) = [D^3 U(r)]\delta_r$ .

**Complexité de l'aspect géométrique** C'est de loin l'aspect le plus vierge, le plus mal connu et difficile ! Malgré cela, quelques points peuvent être éclairés à la lumière d'un article de L. CAFFARELLI & A. FRIEDMAN, et des connaissances acquises sur le problème de l'obstacle modèle de la membrane. Le résultat qui fait particulièrement défaut ici est un principe du maximum pour le bilaplacien. Sans celui-ci, il ne nous a pas été permis d'énoncer un lemme « de petite boule positive », afin d'établir le caractère non-fractal de la frontière libre sous une hypothèse de non dégénérescence *ad hoc*. Soulignons que même si sous certaines conditions sur la géométrie ou le chargement un principe du maximum peut être donné pour le bilaplacien, ceci ne permet pas de calquer directement pour (6) la preuve donnée par L. CAFFARELLI [28] pour le cas du laplacien qui nécessite l'application du principe du maximum sur toute une famille de sous domaines de  $\Omega$ . Comme dans le cas du laplacien, il

<sup>8</sup>voir la formulation de l'équilibre (4.6)



est aisé de vérifier que sans imposer ce type de condition restrictive, la frontière libre peut être très « chahutée », au point d'être fractale<sup>9</sup> même avec des données  $C^\infty$ . Pour obtenir des informations sur les points réguliers et singuliers de la frontière libre, il faut *a priori* distinguer au moins deux cas : d'une part celui où le contact s'effectue à l'ordre 1 seulement, et d'autre part celui où il y a raccord des courbures, contact d'ordre 2. Dans le cas du contact à l'ordre 1, [30] montre que la frontière libre est localement contenue dans une courbe de classe  $C^1$ . Tandis que la transformation de l'hodographe, assure que si la frontière libre est  $C^1$  et que les données sont analytiques il en va de même pour la frontière libre. Signalons aussi que la Conjecture de Schaeffer reste ouverte en ce qui concerne le problème de l'obstacle pour une plaque.

**Stabilité au sens d'Adams** Toujours dans [30] les auteurs détaillent un exemple dans lequel la zone de contact passe d'un disque à un cercle quand ils perturbent (de façon infiniment régulière) la fonction d'obstacle ! A leur suite D. ADAMS [3], s'est intéressé à l'influence du mode de convergence (au sens de la topologie des espaces de Sobolev  $\mathbb{W}^{m,p}$ ) d'une suite d'obstacles  $(\psi_k)_k$  sur la convergence des solutions correspondantes  $(U_k)$  du problème (6), avec  $F = 0$ . Il prouva que  $U_k \rightarrow U$  dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  implique  $U_k \rightarrow U$  dans  $\mathbb{H}_{loc}^3(\Omega)$ , sous certaines hypothèses d'intégrabilité sur  $U_k$  et  $\psi$ . Plus tard [4], il précisa en quel sens  $\psi_k \rightarrow \psi$  implique convergence  $U_k \rightarrow U$  dans  $\mathbb{H}_{loc}^3(\Omega)$  sous l'hypothèse  $\Delta U = \Delta \psi$  sur  $\text{supp}(\mu)$ . Il souligna que cette notion de stabilité ne dépend pas tant du mode de convergence que de la nature géométrique de la zone de contact. En nous inspirant de ses techniques, nous prouverons que  $F_k \rightarrow F$  dans  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  implique  $U_k \rightarrow U$  dans  $\mathbb{H}^3(\Omega)$ , pour autant que les données soient suffisamment régulières (ceci afin de pouvoir écrire  $\mathbb{H}^3$  à la place de  $\mathbb{H}_{loc}^3$ , car nous nous limitons à la dimension 2).

**Stabilité géométrique au sens de Schaeffer pour le bilaplacien** Nous avons étendu le théorème de stabilité de Schaeffer de 1975 au cas du bilaplacien. Du fait de sa difficulté technique, il s'agit du résultat principal de ce travail de thèse. Ce résultat de stabilité géométrique précise la suggestion d'Adams. Ce théorème peut s'énoncer brièvement, en disant que pour un domaine  $\Omega$  à bord lisse, et pour un obstacle  $\psi$  plan, si la zone de contact  $\mathcal{I}(F^\circ)$  est une surface lisse associée à une force  $F^\circ \in C^\infty(\Omega)$  vérifiant l'hypothèse de non dégénérescence  $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$ , alors quelle que soit  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\Omega)$ , la zone de contact correspondante  $\mathcal{I}(F)$  est une surface lisse difféomorphe  $\mathcal{I}(F^\circ)$ . Dans ce cas, la normale  $n$  à  $\partial\mathcal{I}(F)$  est bien définie, ainsi la formulation forte prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} D\Delta^2 U & = & F \quad \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{I}(F) \\ U & = & \psi \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n U & = & \partial_n \psi \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ \partial_n^2 U & = & \partial_n^2 \psi \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \end{array} \right. \quad (8)$$

La preuve consiste en l'application d'un théorème des fonctions implicites de Nash-Moser, reposant sur des *estimations douces* dans l'espace de Fréchet  $C^\infty(\Omega)$ . Pour cela nous per-

<sup>9</sup>Quand il y a contact affleurant avec des données de classe  $C^\infty$  la zone de contact est l'ensemble des zéros d'une fonction de classe  $C^\infty$  qui peut-être un compact quelconque. Avec cette observation, pour un chargement  $F^0$  donné de classe  $C^\infty$ , qui induit une certaine zone de contact disons  $\mathcal{I}^0$  il suffit de modifier  $F^0$  en  $F^1$  pour venir toucher l'obstacle sans réaction (contact affleurant) alors on peut s'arranger pour que dans le complémentaire de  $\mathcal{I}^0$  la solution  $U^1$  soit de classe  $C^\infty$  (si toutes les données le sont) donc la zone de contact qui est l'ensemble  $\mathcal{I}^1 = \{U^1 - \psi = 0\}$  peut être très chahutée ... peut être même fractale.

turbons la frontière libre initiale  $\partial\mathcal{I}(F^\circ)$  par une fonction  $u$  lisse pour obtenir une nouvelle zone de contact  $\mathcal{I}(F)$ . Puis nous cherchons à relier cette perturbation  $u$  à la force  $F$ . Pour ce faire nous traduisons en équation fonctionnelle la condition surabondante, qui est la dernière équation de (8). Le point clé est d'exploiter cette condition de raccord des courbures sur  $\partial\mathcal{I}(F)$ .

Nous disons que la zone de contact  $\partial\mathcal{I}(F^\circ)$ , associée à  $F^\circ$ , est stable au sens de Schaeffer si quelle que soit  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\Omega)$ , la zone de contact correspondante  $\mathcal{I}(F)$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

Il faut prendre garde au fait que si l'hypothèse de non dégénérescence n'est pas vérifiée, alors la zone de contact peut être *instable*. Les motifs d'instabilité géométrique sont nombreux, comme dans le contre-exemple de Caffarelli et Friedman où l'on passe d'un cercle à un disque en modifiant de façon très régulière le champ de forces appliquées, toutes données égales par ailleurs. Toujours en perturbant le champ de forces appliquées, on peut également sauter d'un point à un disque, faire apparaître des cusps, ou encore créer la coalescence de deux zones de contact.

Il est possible d'étendre ce théorème pour des obstacles lisses mais non plats, en modifiant l'hypothèse de non dégénérescence pour imposer le contact franc sur toute la zone de contact ( $\text{Supp}(\mu(F^\circ)) = \mathcal{I}(F^\circ)$ ), et une condition assurant l'existence d'efforts tranchants non nuls sur  $\partial\mathcal{I}(F^\circ)$ .

**Comment étudier la sensibilité du problème de l'obstacle dans  $\mathbb{H}^2$  ?** L'idée d'obtenir des propriétés de différentiabilité au premier ordre de la fonction valeur optimale d'inéquations variationnelles paramétrées (appelées aussi « équations généralisées ») à partir d'estimations supérieure et inférieure remonte à J. M. DANSKIN dans les années 70. Plus tard, A. SHAPIRO [114] exploita des estimations supérieure et inférieure au second ordre de la fonction valeur optimale dans l'optique d'établir -quand elles sont suffisamment proches l'une de l'autre- un développement au second ordre de la fonction valeur optimale. A partir de là, on tire un développement au premier ordre des solutions optimales. Ce dernier développement s'obtient par des arguments de dualité, grâce à des problèmes d'optimisation auxiliaires faisant intervenir les espaces tangents à l'ordre 2 obtenus par R. COMINETTI [41], [43] et H. KAWASAKI [79]. Nous avons déjà signalé que l'étude de la sensibilité du problème de l'obstacle pour la membrane a pu être réalisée grâce à la polyédricité des convexes de  $\mathbb{H}^1$ . Il a été démontré par M. RAO & J. SOKOLOWSKI [106] qu'en général les convexes de  $\mathbb{H}^2$  ne sont pas polyédriques ! Cependant en 1994 A. CIMETIÈRE & A. LÉGER [39] obtinrent un résultat de stabilité et de différentiabilité concernant le problème d'obstacle de flexion d'une poutre sous des hypothèses portant sur la géométrie de la zone de contact, les forces, et plus généralement la réaction. En fait, ces hypothèses restrictives assurent la polyédricité, et permettent l'écriture d'une méthode de suivi de courbe. Les techniques de preuves employées, valables en dimension 1 d'espace, ne peuvent pas être étendues directement à la dimension 2. En 2006, F. BONNANS & A. HERMANT [22] ont proposé des résultats de différentiabilité pour des problèmes de contrôle optimal qui permettent de généraliser l'étude de A. Cimetière et A. Léger, ceci par des méthodes de perturbation à l'ordre 2, puisque l'approche développée par F. MIGNOT [95] pour les inéquations variationnelles au premier ordre n'est pas suffisante. Démontrés pour le cas d'une variable d'état scalaire sous des hypothèses géométriques moins restrictives que [39], ils autorisent à s'affranchir de la polyédricité. Nous introduirons le sigma-terme de Kawasaki et l'espace tangent à l'ordre 2, que nous calculerons dans le cas du problème de l'obstacle pour une poutre en flexion, puis pour une plaque. Ceci nous

permettra d'expliciter la forme de la dérivée de  $U$  par rapport à  $F$ , avec des hypothèses plus faibles que [39] admettant des situations où il n'y a pas polyédricité. Nous illustrerons comment la courbure de la poutre, ou de la plaque peut créer des situations d'instabilité. Comprendre les difficultés et proposer des solutions alternatives pour le problème de stabilité et de sensibilité en dimension 2 constituent l'apport essentiel de ce travail de thèse.

### 3. Et en grandes déformations...

Dans le dernier chapitre nous donnons quelques pistes de réflexions, qui se dégagent des études en petites déformations pour la membrane et la plaque, puis des techniques dont nous disposons pour tracer les graphes de bifurcations de certaines familles d'inéquations variationnelles elliptiques d'ordre 2.

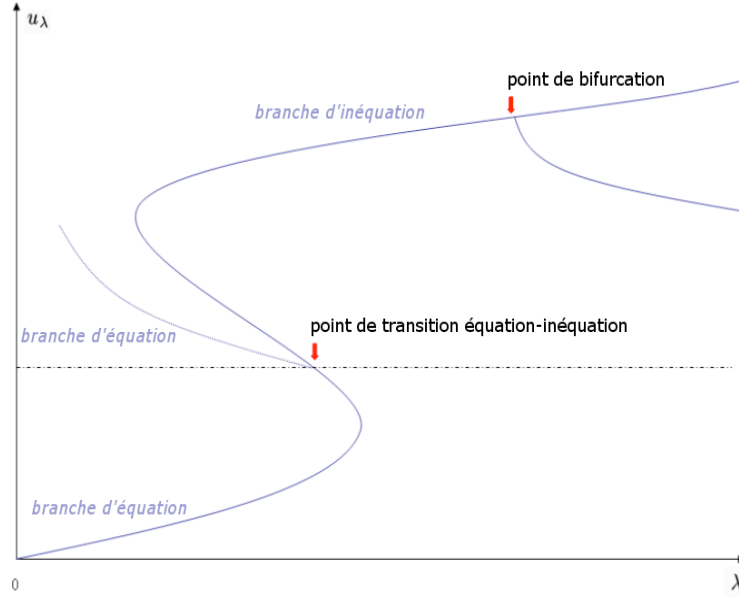
Un modèle très simplifié<sup>10</sup> pouvant être utilisé pour décrire l'équilibre d'une membrane élastique non-linéaire tendue au dessus d'un obstacle rigide  $\psi$ , soumise à un chargement transversal  $F$ , et un chargement latéral contrôlés par le paramètre  $\lambda$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Delta U & = & \lambda U + \lambda U^2 + \lambda F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ \partial_n U & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ U & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) & \perp & \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right. \quad (9)$$

**Que dire de la géométrie ?** Les problèmes d'obstacle pour des opérateurs non-linéaires plus généraux que (4) ont plutôt été traités au cas par cas, et il n'y pas de théorie unifiée. Cependant on peut quand même affirmer que l'ensemble des résultats géométriques sur la classification des singularités de la zone de contact du problème de l'obstacle pour la membrane linéaire peut se transposer pour certaines familles d'inéquations variationnelles comme les opérateurs linéaires elliptiques linéaires réguliers d'ordre 2 [113], [99]. Dans [31] L. CAFFARELLI & N. RIVIÈRE énoncent que leurs techniques de blow-up s'étendent à des opérateurs quasilineaires d'ordre 2, mais ne prouvent que certains cas particuliers comme les surfaces minimales. D. SCHAEFFER mentionne également dans [117] que l'emploi du théorème de Nash-Moser pour décrire la stabilité de la zone de contact par perturbations peut s'adapter facilement pour des formes quadratiques coercives régulières plus générales. Enfin citons que la transformation de l'hodographe, disant *grosso modo* que la solution est aussi régulière que le permettent les données en dehors des points singuliers, est valable pour des opérateurs quasilineaires [81].

**Bifurcation en présence d'obstacle** Dans [86], sont donnés des théorèmes qui étendent au cas des inéquations les résultats classiques de bifurcations globales. Les preuves sont basées sur la théorie du degré topologique de Leray-Schauder [87]. L'allure du diagramme de bifurcation pour les problèmes (9) et (3) peut s'en déduire, mais cette approche globale n'est pas constructive. On sait qu'en particulier pour (9) et (3) il existe des branches de solutions avec au plus un ensemble dénombrable de points de bifurcation. Pour mettre en place une méthode de continuation sur ces branches, il faut comprendre le comportement local des solutions. Puisqu'une solution de (9) apparaît comme une projection sur un convexe de l'espace  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ , et que cette projection est directionnellement différentiable, la notion de point

<sup>10</sup>Il s'agit d'une simplification très grossière du problème unilatéral associé à l'opérateur de Monge-Ampère (1.39), cependant il fait parti de la famille d'opérateurs elliptiques non-linéaires d'ordre 2 que plusieurs auteurs [46], [45], [76], [66] ont exploré du point de vu du suivi de courbe.



régulier et singulier, par rapport au paramètre de bifurcation pour le cas bilatéral, peut être adaptée à certaines inéquations variationnelles par un procédé de *linéarisation conique*. Dans la thèse de F. ISSARD-ROCH [76] est prouvée l'existence de développements locaux au voisinage des points réguliers et de certains points singuliers. Ces résultats sont repris et complétés dans [45]. F. CONRAD, R. HERBIN & H. MITTELMANN [46] ont adapté la procédure numérique de continuation par *prédiction-correction* [80] de H. KELLER pour certaines familles d'inéquations variationnelles (opérateurs elliptiques d'ordre 2) associées à des problèmes d'obstacle avec des solutions multiples et des points de retournement.

Dans les années 1980, C. DO [52] et A. CIMETIÈRE [37] ont donné certaines propriétés locales des points de bifurcations pour le cas d'une plaque de von Kármán reposant sur obstacle rigide plan et dont le bord est encastré sur l'obstacle (i.e. pour le problème (3) avec  $\psi \equiv 0$  et  $\Theta$  remplacé par  $\lambda\Theta$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est le paramètre de bifurcation). Par une méthode de Liapounov-Schmidt adaptée au cas des inéquations, A. CIMETIÈRE [38] propose une méthode de construction du diagramme  $\lambda \mapsto U(\lambda)$  dans un voisinage de la charge critique positive au-delà de laquelle la plaque flambe (i.e. le premier point de bifurcation). Ils n'ont cependant pas traité le problème de la continuation, bien qu'ayant souligné que la question de la dérivabilité des branches était ouverte. A notre connaissance, bien que diverses approches de la continuation pour les inéquations variationnelles aient été développées, aucune ne traite intégralement la question de la différentiabilité des branches. Cependant nous pouvons citer J. EISNER, M. KUCERA, L. RECKE qui ont donné en 2003 dans [110] des informations précises à ce sujet en imposant des restrictions fortes sur la géométrie de la zone de contact du problème du flambement d'une poutre en présence de contact, généralisant l'approche de [39] via le théorème des fonctions implicites classique.

Un objectif final serait d'obtenir numériquement un diagramme de bifurcation dont l'allure pourrait être :

**Les deux principaux résultats de cette thèse** Le Théorème suivant a fait l'objet d'une publication [104] adaptant la stratégie de preuve donnée dans [117] au cas de l'opérateur bilaplacien (dans le plan).

---

**Théorème** Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{K} = \{V \in \mathbb{H}^2(\Omega) / V|_{\partial\Omega} = 1, V \geq 0 \text{ sur } \Omega\} \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\Delta V|^2 - FV d\Omega \end{array} \right.$$

et supposons que pour  $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i)  $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}^\circ$ .
- (ii)  $\mathcal{I}^\circ := \mathcal{I}(F^\circ)$  soit union finie de surfaces lisses, (i.e  $C^\infty$ ).

Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\mathcal{I}(F)$  est difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

En collaboration avec le professeur J.-F. Bonnans, nous avons démontré le Théorème de sensibilité suivant concernant les plaques en flexion (i.e. l'opérateur bilaplacien dans le plan). Il fera l'objet d'un Rapport de Recherche INRIA.

---

**Théorème** Soient  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , et  $\Omega$  un domaine du plan de classe  $C^{4,\alpha}$ . Soient  $F = F_0 + tH \in L^2(\Omega)$ ,  $t \geq 0$ ,  $U_0 := U(F_0)$ ,  $U := U(F) \in \mathbb{K}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$  solution de :

$$\min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega.$$

Plaçons nous sous les hypothèses :

**(H1)** Les courbes de contact de l'ensemble de coïncidence  $\mathcal{I}_0$  associé à  $F_0$  sont un ensemble fini  $\mathcal{T}_0$  de courbes de classe  $C^2$  et telles que

$$\forall X^0 \in \mathcal{T}_0 \cap \text{Supp}(\mu_0), \quad \partial_n^2(U_0 - \psi)(X^0) > 0.$$

**(H2)** Le support de la réaction  $\mu_0$  associée à  $U_0$ , noté  $\text{Supp}(\mu_0)$ , est union finie de surfaces  $\mathbb{H}^2$ -admissibles.

Alors la dérivée directionnelle  $Z_0(.) := U'_0(., H)$  dans la direction  $H$  et la solution de

$$\inf_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} ((\Delta Z)^2 - HZ) d\Omega - \int_{\mathcal{T}_0} \theta_{Z, U_0} d\mu_0,$$

avec pour tout  $X^0 \in \mathcal{T}_0 \cap \text{Supp}(\mu_0)$  :

$$\theta_{Z, U_0}(X^0) = \varsigma_{U_0, Z}(X^0) = (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}$$

fini pour tout  $Z$  critique.

## NOTATIONS

" := " signifie égal par définition.

Nous notons  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker et employons la convention de sommation d'Einstein.

$\mathbb{R}$  = corps des nombres réels ;  $\mathbb{C}$  = corps des nombres complexes ;

$\mathbb{R}^n$  = espace euclidien de dimension  $n$ .

$x \cdot y := \sum_{0 \leq i \leq n} x_i y_i$  = produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ .

$|x| := \sqrt{\sum_{0 \leq i \leq n} x_i x_i}$  = norme de  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$dist(x, A)$  = distance de l'élément  $x$  à l'ensemble  $A$  ;  $dist(B, A)$  = distance de l'ensemble  $B$  à l'ensemble  $A$ .

$\mathbb{B}^n(a, r)$  = boule de rayon  $r$  et de centre  $a \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbb{S}^{n-1}(a, r) := \partial \mathbb{B}^n(a, r)$  = sphère de rayon  $r$  et de centre  $a \in \mathbb{R}^n$ .

$\Omega =$  un ouvert bornée connexe de  $\mathbb{R}^n$  ;  $\partial \Omega =$  le bord de  $\Omega$  ;  $int(\Omega) = \overset{\circ}{\Omega} =$  intérieur de  $\Omega$  ;

$\overline{\Omega} = adh(\Omega)$  = adhérence / fermeture de  $\Omega$  ;

$\mathbb{C}_{\Omega} A = \Omega \setminus A = A^c$  = complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ .

$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  = différence symétrique de  $A$  &  $B$ .

$\mathbf{1}_A$  = indicatrice de l'ensemble  $A$ .

$\mathbb{I}_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$  = fonction indicatrice convexe de  $A$ .

$dom(f) : \{x \in X / f(x) < +\infty\}$  domaine de la fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ;

$supp(f) := \overline{\{x \in X / f(x) \neq 0\}}$  = support de la fonction  $f$  ;

$[f]^+ := \sup(f, 0)$  = partie positive de  $f$  ;  $[f]^- := \inf(f, 0)$  = partie négative de  $f$

$f_{,i} = \partial_i f = f_{,x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  = dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$ .

$\nabla f := (f_{,i})_{0 \leq i \leq n}$  = gradient de  $f$ .

$f * g$  est le produit de convolution de  $f$  par  $g$ .

$\partial_n f = \nabla f \cdot n = \sum_i f_{,i} n_i$  dérivée de  $f$  suivant le vecteur  $n$ .

$\partial_n^2$  est défini à la Remarque 2.7.1 en bas de page.

$\Delta f := \nabla \cdot (\nabla f) := \sum_i \partial_i^2 f$  = laplacien de  $f$ .

$\Delta^2 f := \Delta(\Delta f) := \sum_{i,j} \partial_{i,j}^2 f$  = bilaplacien de  $f$ .

$\Delta_{(\mathbf{g})}(f)$  = laplacien-beltrami de  $f$ , induit par la métrique  $\mathbf{g}$ .

$\Delta_{(\mathbf{g})}^2(f)$  = bilaplacien-beltrami de  $f$ .

$\Lambda_n$  = mesure de Lebesgue  $n$ -dimensionnelle.

$\delta_x$  = masse de Dirac en  $x$ .

$\mathcal{H}_n$  = mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle.

$Cap_1(N) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 d\Omega, / 0 \leq \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d), \phi \geq 1 \text{ sur } N \right\}, N \subset \Omega \text{ compact.}$

$Cap_2(N) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\Delta \phi|^2 d\Omega, / 0 \leq \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d), \phi \geq 1 \text{ sur } N \right\}, N \subset \Omega \text{ compact.}$

$[u; v] := \partial_x^2 u \partial_y^2 v + \partial_y^2 u \partial_x^2 v - 2 \partial_{xy}^2 u \partial_{xy}^2 v$  est le crochet de Monge-Ampère.

$\|\cdot\|_X$  = norme sur l'espace de fonctions  $X$ .

$C^m(\Omega) = \{ \text{fonctions } m\text{-fois dérivables de dérivées } m\text{-ième continues sur } \Omega \}.$

$C^{m,\alpha}(\Omega) = m\text{-ième espace de Hölder de degré } \alpha ;$

$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega}) / \|u\|_{C^{0,\alpha}} < +\infty\}$  est un Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + |u|_{\alpha;\Omega} \text{ où } |u|_{\alpha;\Omega} := \sup_{x,y \in \Omega; x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha};$$

et  $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^m(\overline{\Omega}) / \|u\|_{C^{m,\alpha}} < +\infty\}$  avec  $\|u\|_{C^{m,\alpha}} := \|u\|_{C^m} + \sum_{|i|=m} |\partial_i^m u|_{\alpha;\Omega}$

$L^p(\Omega)$  =  $p$ -ième espace de Lebesgue

$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$  = espace des fonctions tests (de Schwartz), i.e ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  = espace des fonctions lisses sur  $\mathbb{R}^d$  nulles en l'infini.

$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) / D^i f \in L^p(\Omega)\}; |i| \leq m\}$  = le  $m$ -ième espace de Sobolev de  $L^p(\Omega)$ .

$\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)}$

$\mathbb{H}^m(\Omega) := \mathbb{W}^{m,2}(\Omega)$  si  $p = 2$ ; c'est un espace de Hilbert<sup>11</sup>.

$\mathcal{L}^*(X, Y)$  = ensemble des applications linéaires continues de  $X$  dans  $Y$ .

$BV(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de  $L^1(\Omega)$  dont la dérivée est une mesure de Radon finie<sup>12</sup>

$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \bigcup_{t>0} t(\mathbb{K} - u)$  est le cône de support à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .

$\text{T}_{\mathbb{K}}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u)/t = \{h \in \mathbf{X} / \text{dist}(u + th, \mathbb{K}) = o(t), t \geq 0\} = \overline{\text{Cs}}_{\mathbb{K}}(u)$  est le cône tangent à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .

$\text{T}_{\mathbb{K}}^2(u) := \limsup_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th)/(\frac{1}{2}t^2) = \{w \in \mathbf{X} / \exists t_n \downarrow 0 : \text{dist}(u + th + \frac{1}{2}t_n^2 w, \mathbb{K}) = o(t)\}$  est l'ensemble tangent extérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .

$\text{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th)/(\frac{1}{2}t^2)$  est l'espace tangent intérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .

$\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)$  est le cône critique à  $\mathbb{K}$  en  $u$  associé à une inéquation variationnelle paramétrée (ou plus généralement d'un problème d'optimisation sous contraintes).

$\text{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{h^* \in \mathbf{X}^* / \langle h^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  est le cône normal à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .

$\text{Val}(\cdot)$  est la fonction valeur optimale associée à un problème d'optimisation.

<sup>11</sup> La forme définie sur  $\mathbb{H}^m(\Omega) \times \mathbb{H}^m(\Omega)$  par  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{q \leq m} \sum_{r \leq m} \frac{\partial^q u}{\partial x_1 \dots \partial x_q} \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \dots \partial x_r} d\Omega$  est un produit scalaire. Muni de ce produit scalaire, l'espace  $\mathbb{H}^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

<sup>12</sup>  $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV})$  est un espace de Banach pour la norme  $\|u\|_{BV} = \int_{\Omega} |u| d\Omega + |Du|(\Omega)$ , avec  $|Du|(\Omega) := V(u, \Omega) =$  est la variation totale de  $u = \sup\{\sum_{1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} \phi_i dD_i u_j / \phi \in C_c^1(\Omega), \|\phi\|_{\infty} = 1\}$ .





# Chapitre 1

## RAPPELS DE THEORIE DES STRUCTURES

"Les deux yeux de l'enfant sont des étoiles. Ce n'est pas de la poésie, c'est de la science."

Chich Nhat Hanh

Notre travail concerne les membranes, les poutres et les plaques. Dans cette partie introductive, nous rappellerons brièvement les quelques modèles de structures que nous allons utiliser. Nous fixerons ainsi certaines notations qui serviront par la suite.

### 1.1 Plaques en petites et grandes déformations

#### 1.1.1 Modèle des plaques linéaires

**Définition 1.1.1** Munissons l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^3$  d'une base orthonormée directe  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soient  $\Omega$  un ouvert borné connexe du plan  $\mathbb{R}\vec{e}_1 \times \mathbb{R}\vec{e}_2$ , à bord régulier, et  $h > 0$ . Une **plaque** est un milieu continu solide déformable occupant en l'absence de forces extérieures un ouvert de la forme

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \text{ \& } (x_1, x_2) \in \Omega\},$$

où l'épaisseur de la plaque  $h$  est petite devant le diamètre de  $\Omega$ , et  $\Omega$  est appelé le **feuillet moyen** de la plaque.

Nous présentons le modèle des plaques minces de Love-Kirchhoff [94], qui est construit en faisant des hypothèses sur la forme des contraintes et des déplacements. Nous décrivons ici brièvement ce modèle afin d'obtenir les équations d'équilibre avec et sans obstacle.

#### Hypothèses de Love-Kirchhoff

1. Les composantes  $\sigma_{i3}$  du tenseur des contraintes  $\sigma$  sont nulles (*hypothèse des contraintes planes*)
2. Les sections droites, initialement normales au feuillet moyen, restent planes et normales à celui-ci (*linéarisation en  $x_3$* ).

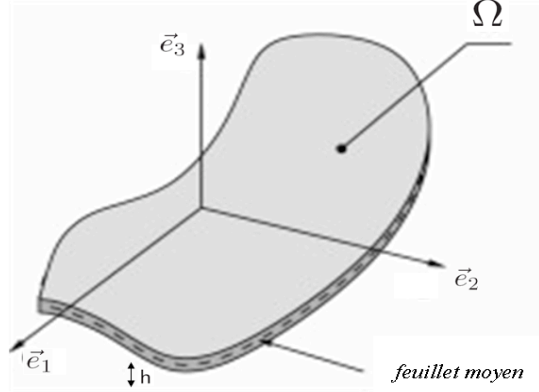


FIG. 1.1 – feuillet moyen d’une plaque d’épaisseur  $h$ .

Notons  $\bar{\mathbf{U}} := (\bar{U}_i)_{0 \leq i \leq 3}$  le déplacement dans le feuillet moyen. Nous développons le déplacement de la plaque  $\vec{\mathbf{U}}(x^1, x^2, x^3)$  autour de  $x_3 = 0$ , et ne retenons que la partie linéaire en  $x_3$ . Les composantes des champs de déplacements de Love-Kirchhoff  $(U_i)_{0 \leq i \leq 3}$  satisfont :

$$\left| \begin{array}{l} U_1(x_1, x_2, x_3) := \bar{U}_1(x_1, x_2) - x_3 \partial_1 \bar{U}_3(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) := \bar{U}_2(x_1, x_2) - x_3 \partial_2 \bar{U}_3(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) := \bar{U}_3(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Le déplacement normal  $\bar{U}_3$  est appelé la *déflexion verticale*, qui est notée

$$\bar{U}_3(x_1, x_2) := U(x_1, x_2), \text{ avec } U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \vec{e}_3.$$

**Commentaires 1.1.1** Le champ de déplacements  $\vec{\mathbf{U}}$  dans la plaque est exprimé en fonction du champ de déplacement du feuillet moyen plus est un vecteur tangent proportionnel à  $x_3$ . Les hypothèses 1. et 2. sont incompatibles en élasticité linéaire 3D homogène isotrope. Aussi doit on modifier la loi de comportement (le tenseur d’élasticité) pour pouvoir conserver ces hypothèses.

### Efforts dans plaques

Introduisons les efforts généralisés suivants associés à la contrainte 3D,  $\boldsymbol{\sigma}$  :

- $\mathbf{N}$  tenseur des efforts membranaires,
- $\mathbf{M}$  tenseur des moments fléchissants,
- $\mathbf{Q}$  vecteur des efforts tranchants,

définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_{\alpha\beta} = \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta} = \int_{h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \\ \mathbf{Q}_\alpha = \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Dans ce modèle, il ne reste que les efforts généralisés  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  dans l'écriture de l'énergie élastique, puisque l'énergie due aux cisaillements est nulle (d'après l'Hypothèse 1. de Love-Kirchhoff), i.e.  $\mathbf{Q}$  est nul puisque les contraintes sont planes.

### Equilibre local

Après intégration de l'équilibre  $-\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{\mathbf{U}}) = \vec{F}$  sur l'épaisseur de la plaque viennent les équations d'équilibre généralisées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_{\alpha\beta,\beta} = -F_\alpha \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -F_3 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

### Le tenseur de déformation de membrane et de courbure

Les déformations et les déplacements sont petits<sup>1</sup> (*hypothèse des petites perturbations*)

En utilisant ce champ de déplacements, et en tenant compte des hypothèses précédentes, viennent les composantes sur la base naturelle  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \equiv \{\vec{e}_\alpha, \vec{e}_3\}_{\alpha=1,2}$  du tenseur des déformations linéarisées dans la plaque :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{\alpha,\beta} + \mathbf{U}_{\beta,\alpha}) + x_3(-U_{,\alpha\beta}),$$

---

1

**Commentaires 1.1.2** *Du seul point de vue cinématique, on distingue les déformations petites (infinitésimales) ou grandes, et les déplacements petits modérés et grands. Les déformations sont petites si chaque composante de la déformation est petite devant l'unité. Les déplacements sont petits si la norme du vecteur déplacement est négligeable devant une longueur caractéristique du corps. Le cas des déplacements modérés se présente pour les structures, pour lesquelles la théorie doit considérer des déplacements du type rotations/ translations. Les déplacements sont dits modérés si la rotation (par rapport au feuillet moyen) peut être approchée au second ordre. Pour être plus précis, rappelons la formule de Rodrigues exprimant une matrice de rotation en fonction de son angle  $\beta$  et son axe  $\vec{n}$  :*

$$\vec{R}_{\beta, \vec{n}} = Id + \sin(\beta)(\vec{n} \wedge) + (1 - \cos \beta)(\vec{n} \wedge)^2$$

avec  $Id$  l'identité et  $\vec{n} \wedge$  la matrice du produit vectoriel par  $\vec{n}$ , i.e.

$$\vec{n} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$$

L'hypothèse des rotations modérées est l'approximation à l'ordre 2 de la formule de Rodrigue :

$$\vec{R}_{\beta, \vec{n}} \sim Id + (\vec{n} \wedge) + (\vec{n} \wedge)^2$$

Cette approximation est précise pour des angles  $\beta$  ne dépassant pas 0,4 radians (25 degrés). Alors que les petites rotations (infinitésimales) sont valides pour des d'angles d'au plus 0,01 rad (6 degrés).

où il apparaît

- le tenseur des déformations de membrane  $\mathbf{e}$ , dont les composantes covariantes sont :

$$\mathbf{e}_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{\alpha,\beta} + \mathbf{U}_{\beta,\alpha}),$$

- le tenseur des courbures  $\boldsymbol{\kappa}$ , dont les composantes covariantes sont :

$$\kappa_{\alpha\beta} = -U_{,\alpha\beta}.$$

### Relation de comportement

La loi de comportement d'un milieu surfacique doit être une relation entre les tenseurs de contraintes généralisées et les tenseurs qui caractérisent les changements dans la surface, c'est à dire la déformation dans la surface et les variations de courbure. Pour établir la loi de comportement élastique de Love-Kirchhoff, il faut poser que la plaque tridimensionnelle est un milieu continu élastique et en tirer les conséquences sachant qu'il existe deux tenseurs de surface qui caractérisent les changements locaux dans la surface : un tenseur des petites déformations et un tenseur de variation de courbure linéaire en  $\bar{\mathbf{U}}$ . Les tenseurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  sont reliés aux tenseurs  $\mathbf{e}$  et  $\boldsymbol{\kappa}$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{\gamma\delta} &= \mathbf{n}_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \mathbf{e}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{M}_{\gamma\delta} &= \mathbf{m}_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \kappa_{\alpha\beta} \end{cases} \quad (1.4)$$

Les coefficients  $\mathbf{n}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $\mathbf{m}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  satisfont aux relations habituelles de symétries et d'ellipticité et s'expriment en fonction de l'épaisseur  $h$  et des coefficients d'élasticité du matériau, et finalement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h} \mathbf{N} + \frac{12}{h^3} \mathbf{M} x_3.$$

### Equations d'équilibre complètes en $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$

Nous pouvons synthétiser l'écriture de l'équilibre d'une plaque sous la forme des deux systèmes en  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  *découplés* suivants.

► Equations de membrane :

$$\begin{cases} -\overrightarrow{Div}(\mathbf{N}) &= (F_1, F_2) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{N} \cdot \vec{\nu} &= \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

► Equations de flexion :

$$\begin{cases} -div\overrightarrow{Div}(\mathbf{M}) &= F_3 & \text{dans } \Omega \\ -\overrightarrow{Div}(\mathbf{M}) \cdot \vec{\nu} &= \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}}(\vec{\nu} \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\tau}) & \text{sur } \partial\Omega \\ \vec{\nu} \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\nu} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

Les équations de membranes sont linéaires, et les équations de flexion ne dépendent que de  $F_3$  la composante normale du champ de forces  $\vec{F}$ . Le découplage<sup>2</sup> entre (1.6) et (1.5) s'observe grâce à (1.4) et au fait que le tenseur  $\mathbf{e}$  ne dépend que de  $\mathbf{U}_\alpha$  alors que  $\boldsymbol{\kappa}$  ne dépend

<sup>2</sup> Ce découplage n'a pas lieu pour des grandes déformations (Modèle des plaques de von Kármán).

que de  $U$ . Ce qui justifie qu'on ne s'intéresse dans la suite qu'aux équations de flexion (1.6).

Une justification asymptotique de la convergence de ce modèle lorsque l'élancement de la plaque  $\frac{\text{diam}(\Omega)}{h}$  tend vers l'infini, a été donnée par P.G. CIARLET & P. DESTUYNDER en 1979 [36].

### Equation d'équilibre local de la flexion & encastrement

La déflexion verticale est l'inconnue de notre problème, il est nécessaire de se donner des conditions à la frontière de  $\Omega$ .

En général on partitionne  $\partial\Omega$ , et impose des conditions d'appui simple, de bord libre ou encore d'encastrement. Pour simplifier nous supposons que la plaque est *encastrée* sur  $\partial\Omega$ . Sous les hypothèses précédentes l'équation (1.6) de la flexion d'une plaque encastree, sous un champ de forces  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , est :

$$\left\{ \begin{array}{lll} D\Delta^2 U & = & F_3 \quad \text{sur } \Omega, \\ U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Dans cette modélisation où l'on passe d'un domaine 3D à un domaine 2D, il ne reste plus de souvenir de l'épaisseur  $h$  de la plaque que dans le terme de rigidité  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  étant le module de Young et  $\nu$  ( $\frac{1}{2} > \nu > 0$ ) le coefficient de Poisson de la plaque. Nous posons pour la suite  $D = 1$ .

Le problème d'équilibre sans obstacle (1.6) et (1.5) est posé dans le domaine bidimensionnel  $\Omega$ .

#### 1.1.2 Modèle des plaques de von Kármán

Avec le cadre et les notations du modèle des plaques linéaires, considérons une plaque mince qui, dans son état naturel, occupe un domaine borné  $\Omega$  contenu dans le plan  $\mathbb{R}\vec{e}_1 \times \mathbb{R}\vec{e}_2$ , avec un bord  $\partial\Omega$  suffisamment régulier. L'état déformé de la plaque est entièrement caractérisé, à un déplacement rigide près, par son tenseur métrique  $\mathbf{g}$  et son tenseur de courbure  $\boldsymbol{\kappa}$ . Rappelons que l'on pose dorénavant  $\mathbf{U}_3 = U$ . Dans l'approximation non linéaire de von Kármán ces tenseurs s'expriment sous la forme :

$$\boldsymbol{\kappa} := \nabla^2(U),$$

et

$$\mathbf{g} := Id + \nabla(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) + \nabla(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)^t + \nabla(U) \otimes \nabla(U).$$

La loi de comportement de l'élasticité linéaire et isotrope relie les tenseurs  $\mathbf{g}$  et  $\boldsymbol{\kappa}$  aux tenseurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{N}_{\gamma\delta} = n_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \left[ (\mathbf{U}_{\gamma,\delta} + \mathbf{U}_{\delta,\gamma}) + \frac{1}{2} U_{,\alpha} U_{,\beta} \right] \quad (1.8)$$

$$\mathbf{M}_{\gamma\delta} = m_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

La relation (1.8) est bien *non-linéaire* en  $U$ . Dans [84] et [35] l'équilibre local d'une plaque mince encastrée sur une partie  $\Gamma_e \neq \emptyset$ , et en appui simple sur  $\Gamma_s$ , soumise à des forces normales  $F \in L^2(\Omega)$ , et latérales  $L_\alpha \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ , par une solution  $(U^0, U) := (U_1, U_2, U_3) \in (\mathbb{H}^1(\Omega))^2 \times \mathbb{H}^2(\Omega)$  du problème de von Kármán :

$$\left\{ \begin{array}{lll} D\Delta^2 U - h\partial_\beta(N_{\alpha\beta}\partial_\alpha U) & = & +F \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_\alpha N_{\alpha\beta} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ N_{\alpha\beta}n_\alpha & = & L_\beta \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_e, \\ m(U) & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_s, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où  $n = (n_1, n_2)$  est la normale à  $\partial\Omega$  et où le moment au bord s'exprime sous la forme :

$$m(U) = D \left[ \partial_n \Delta U + (1 - \nu) \left( n_1 n_2 \partial_{12}^2 U - n_2^2 \partial_1^2 U - n_1^2 \partial_2^2 U \right) \right].$$

**Première version des équations de von Kármán** Introduisons la *fonction d'Airy* via le Lemme suivant que l'on trouve dans [35], page 48.

**Lemme 1.1.1** Soient  $\Omega$  un domaine simplement connexe borné du plan de classe  $C^{2+m}$ ,  $\tau$  désigne la tangente à  $\partial\Omega$ ,  $m \geq 0$ ,  $L_\alpha \in \mathbb{H}^{1/2+m}(\Omega)$ , et  $(N_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} \in \left(\mathbb{H}^m(\Omega)\right)^4$  un tenseur symétrique vérifiant :

$$\partial_\alpha(N_{\alpha\beta}) = 0, \quad \text{sur } \Omega, \quad \text{et } N_{\alpha\beta}n_\alpha = L_\beta \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

Alors il existe une unique fonction  $\tilde{\chi} \in \mathbb{H}^{m+4}(\Omega)$

$$L_1 = \partial_\tau(\partial_2 \tilde{\chi}), \quad L_2 = -\partial_\tau(\partial_1 \tilde{\chi}) \quad \text{sur } \partial\Omega$$

avec

$$\partial_1^2 \tilde{\chi} = N_{22}, \quad \partial_2^2 \tilde{\chi} = N_{11}, \quad \partial_{12}^2 \tilde{\chi} = -N_{12} = -N_{21}.$$

Nous rappelons l'équivalence du problème (1.10) avec la version suivante des équations de von Kármán faisant intervenir la fonction d'Airy  $\tilde{\chi}$ . Le lecteur pourra consulter [35] et [93], pour les propriétés d'existence et de régularité des solutions du problème aux limites suivant :

**Théorème 1.1.1** Avec les notations du Lemme 1.1.1, soient  $\Omega$  un domaine simplement connexe borné du plan de classe  $C^2$ ,  $L_\alpha \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ , et  $F \in L^2(\Omega)$ . Alors le problème (1.10) est équivalent à trouver  $(U, \tilde{\chi}) \in \mathbb{H}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^3(\Omega)$  solution des équations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 U & = & 2[\tilde{\chi}; U] + F \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \Delta^2 \tilde{\chi} & = & -\frac{E}{2}[U; U] \quad \text{dans} \quad \Omega \\ U & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_e, \\ \mathbf{m}(U) & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_s, \\ \tilde{\chi} & = & \tilde{\chi}_0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \partial_n \tilde{\chi} & = & \tilde{\chi}_1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

et  $\tilde{\chi}_0 \in \mathbb{H}^{5/2}(\partial\Omega)$ ,  $\tilde{\chi}_1 \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$  avec :

$$\begin{aligned} \partial\Omega \ni x &\longmapsto \tilde{\chi}_0(x_1, x_2) := -x_1 \int_{\partial\Omega} L_2(x) dx + x_2 \int_{\partial\Omega} L_1(x) dx + \int_{\partial\Omega} x_1 L_2(x) - x_2 L_1(x) dx \\ \partial\Omega \ni x &\longmapsto \tilde{\chi}_1(x_1, x_2) = -n_1(x) \int_{\partial\Omega} L_2(x) dx + n_2(x) \int_{\partial\Omega} L_1(x) dx \end{aligned} \quad (1.12)$$

En changeant  $U$  et  $\tilde{\chi}$  à des constantes multiplicatives près, il est facile de voir que l'on peut exprimer ces équations sous la forme plus simple (3) qui figure dans l'Introduction pour le cas encasté, et (1.14) ci-dessous - c'est celle sous lesquelles elles figurent généralement dans la littérature.

**Deuxième version des équations de von Kármán** Donnons à présent une forme des équations de von Kármán, qui se prête mieux à l'étude de leurs bifurcations. Introduisons la fonction  $\Theta$  définie comme l'unique solution du problème suivant dépendant des charges aux bords : la

$$\Delta^2 \Theta = 0 \text{ sur } \Omega, \quad \Theta = \tilde{\chi}_0, \quad \partial_n \Theta = \tilde{\chi}_1. \quad (1.13)$$

Avec les notations et hypothèses du Lemme 1.1.1, cette fonction traduit dans le domaine  $\Omega$  la dépendance par rapport aux forces horizontales  $(L_1, L_2)$ , par l'intermédiaire de (1.12).

En posant

$$\chi = \tilde{\chi} - \Theta,$$

le couple  $(U, \tilde{\chi}) \in (\mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^4(\Omega)) \times \mathbb{H}^3(\Omega)$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 U = [\Theta + \chi; U] + F & \text{dans } \Omega \\ \Delta^2 \chi = -[U; U] & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \chi = \partial_n \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Remarquons que ce système d'équations n'est pas fortement couplé, en effet en supposant  $U$  connu, on peut calculer  $\chi$  comme solution du problème biharmonique :

$$\Delta^2 \chi = -[U; U] \text{ dans } \Omega, \quad \chi = \partial_n \chi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.15)$$

Connaissant la fonction  $\Theta$  par (1.13), il découle alors l'équation réduite suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 U = [\Theta - \Delta^{-2}[U; U]; U] + F & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

**Formulation variationnelle en déplacement** Par une intégration par parties des deux premiers termes de (1.10) - en utilisant pour le premier terme, les formules exposées dans [53] chapitre 4 - nous déduisons que l'équilibre global d'une telle plaque revient à trouver<sup>3</sup>  $(U^0, U) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}$  vérifiant :

$$\mathbf{A}(U, V - U) + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} U) \partial_{\beta} (V - U) d\Omega = \int_{\Omega} F(V - U) d\Omega \quad (1.18)$$

pour tout  $V \in \mathbb{K}_{\psi}$ , et pour tout  $(W_{\alpha}) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} W_{\alpha} d\Omega = \lambda \int_{\Omega} L_{\alpha} W_{\alpha} d\Omega. \quad (1.19)$$

Il est montré dans [53] que l'expression

$$\mathbf{A}(U, V) := \int_{\Omega} \mathbf{M}_{\gamma\delta} V_{,\gamma\delta} d\Omega = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \left[ (1 - \nu) U_{,\gamma\delta} V_{,\gamma\delta} \right] + \nu \Delta U \Delta V d\Omega \quad (1.20)$$

est une forme bilinéaire symétrique continue, qui est coercive sur l'espace

$$\mathbb{H} := \{V \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) \mid \partial_n V|_{\Gamma_e} = 0\}$$

dès lors que la plaque est encastrée sur une partie  $\Gamma_e \neq \emptyset$ , et en appui simple sur  $\Gamma_s$ , avec  $\partial\Omega = \Gamma_e \amalg \Gamma_s$ , ce que nous supposons dans toute la suite.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire défini

---

<sup>3</sup>Il est montré dans [53] qu'une forme équivalente s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (U^0, U) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H} \text{ tel que} \\ \mathbf{A}(U, V - U) + h \int_{\Omega} (\partial_{\beta} (\mathbf{N}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} U)) (V - U) d\Omega = - \int_{\Gamma_s} \mathbf{m}(U) \partial_n (V - U) d\Gamma_s + \int_{\Omega} F(V - U) d\Omega, \\ \text{pour tout } V \in \mathbb{H}. \end{array} \right. \quad (1.17)$$



par  $\mathbf{A}$ , il induit une norme  $\|V\| := \sqrt{[\mathbf{A}(V, V)]}$  équivalente à la norme usuelle sur  $\mathbb{H}$ .

Dans la définition de la loi de comportement du tenseur  $\mathbf{N}$  il y a un couplage entre  $\mathbf{U}^0$  et  $U$ . Ce couplage peut être éliminé de l'équilibre si  $\mathbf{N}$  est exprimé en fonction de  $U$  et  $(L_\alpha)$ . Ainsi, d'après [37], lorsque le torseur associé à  $(L_\alpha)$  est nul, si  $U$  est un déplacement admissible fixé, alors le problème qui consiste à trouver  $\mathbf{U}^0$  solution de (1.19) et vérifiant (1.8), admet une seule solution  $\mathbf{N}$  décomposable de façon unique dans  $[L^2(\Omega)]^3$  sous la forme :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^0 + \bar{\mathbf{N}}(U), \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{N}^0$  est indépendant de  $U$  et  $\bar{\mathbf{N}}(U)$  est une fonction quadratique en  $U$  qui vérifie, d'après [102], pour tout  $\mathbf{U}^0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}_{\alpha\beta}(U) \partial_{\alpha} W_{\alpha} d\Omega = 0.$$

Le tenseur  $\lambda \mathbf{N}^0$  représente les contraintes dans le plan de la plaque, soumise au chargement latéral  $(\lambda L_\alpha)$  et astreinte à rester plane.

► L'opérateur  $\mathbf{L}$  est défini<sup>4</sup> par :

$$\langle \mathbf{L}(U), V \rangle := - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} U \partial_{\beta} V, \quad (1.23)$$

Il traduit dans le domaine  $\Omega$  les efforts appliqués au bord  $\partial\Omega$ .

► L'opérateur  $\mathbf{C}$  est défini<sup>5</sup> par :

$$\langle \mathbf{C}(U), V \rangle = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}_{\alpha\beta}(U) \partial_{\alpha} U \partial_{\beta} V \, d\Omega, \quad (1.25)$$

Cet opérateur rend compte des variations de métriques sur le feuillet moyen au cours de la déflexion.

<sup>4</sup>Pour autant que  $\Theta \in \mathbb{H}^2$ , ce qui est justifier par (1.13), nous avons avec les notations du problème simplifié (1.14)

$$\langle \mathbf{L}(U), V \rangle_{\mathbb{H}_0^2} := \int_{\Omega} [\Theta; U] v \, d\Omega \quad (1.22)$$

<sup>5</sup>A nouveau, nous avons avec les notations du problème (1.14)

$$\langle \mathbf{C}(U, V), W \rangle_{\mathbb{H}_0^2} = \int_{\Omega} [U; V] W \, d\Omega, \quad (1.24)$$

puis  $\mathbf{C}(U) = \mathbf{C}(U, \mathbf{C}(U, U))$ .

**Proposition 1.1.1** [35] Soient  $\Omega$  un domaine simplement connexe borné du plan de classe  $C^2$ , un champ de forces latérales  $L_\alpha \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . Alors les opérateurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{C}$  possèdent les propriétés suivantes :

$$\mathbf{L} \text{ est linéaire, auto-adjoint, compact sur } \mathbb{H}; \quad (1.26)$$

$$\langle \mathbf{L}(V), V \rangle \geq 0, \forall V \in \mathbb{H}, \text{ \& } \langle \mathbf{L}(V), V \rangle = 0, \implies V = 0; \quad (1.27)$$

$$\mathbf{C} \text{ est non-linéaire, continu, borné et compact sur } \mathbb{H}; \quad (1.28)$$

$$\mathbf{C}(tV) = t^3 \mathbf{C}(V), \forall t \in \mathbb{R}, \forall V \in \mathbb{H}; \quad (1.29)$$

$$\langle \mathbf{C}(V), V \rangle \geq 0, \forall V \in \mathbb{H}; \quad (1.30)$$

$$\exists k_1 > 0 / \|\mathbf{C}(V_1) - \mathbf{C}(V_2)\| \leq k_1(\|V_1\|^2 + \|V_2\|^2)\|V_1 - V_2\|, \forall V_1, V_2 \in \mathbb{H}; \quad (1.31)$$

$$\mathbf{C}(V) \text{ est la dérivée de } \frac{1}{4} \langle \mathbf{C}(V), V \rangle; \quad (1.32)$$

$$\mathbf{C} \text{ est continûment dérivable, } \exists k_2 > 0 / \forall W \in \mathbb{H}, \|\partial_W \mathbf{C}\| \leq k_2 \|W\|^2. \quad (1.33)$$

Finalement la formulation variationnelle suivante représente une version équivalente de (1.18) & (1.19) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{H} \text{ vérifiant :} \\ \langle U - \lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \Delta^{-2}(F), W - U \rangle = 0, \forall W \in \mathbb{H}. \end{cases} \quad (1.34)$$

**Commentaires 1.1.3** Remarquons que pour tout  $F \in L^2(\Omega)$ , il existe  $\check{F} \in \mathbb{H}$  tel que

$$\int_{\Omega} \check{F} V d\Omega = \langle F, V \rangle, \forall V \in \mathbb{H}. \quad (1.35)$$

C'est grâce à cette formulation que l'on peut montrer l'existence d'au moins une solution et étudier les branches de bifurcations en fonction du paramètre  $\lambda$  [13], [14] et [35].

## 1.2 Modèle des membranes linéaires et non-linéaires

Un cas particulier des déformations des plaques est celui des membranes.

**Définition 1.2.1** Une **membrane** est un milieu continu mince géométriquement analogue à une plaque mais n'ayant pas de rigidité à la flexion.

- La configuration de référence de la membrane est un ouvert borné connexe du plan  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , contenu dans le plan de côte  $x_3 = 0$ . La membrane est fixée à son bord  $\partial\Omega$ . En l'absence de densité surfacique de forces extérieures exercées sur la membrane, sa configuration initiale est un équilibre. A l'équilibre la membrane est représentée via le graphe d'une fonction  $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}e_3$  par l'ensemble  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = U(x_1, x_2)\}$ . Soit  $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\vec{e}_3$ , désigne le champ de forces appliquées sur la membrane. Les équations d'équilibre d'une membrane se déduisent donc de (1.10) en supprimant le terme  $\mathbf{D}\Delta^2 U$  :

$$\begin{cases} \mathbf{h}\partial_\beta(\sigma_{\alpha\beta}^0\partial_\alpha U) + F = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.36)$$

• Sous l'hypothèse des petites perturbations les déplacements sont infinitésimaux, et nous pouvons remplacer le tenseur des déformations par le tenseur des déformations de membranes  $\mathbf{e}$  (approximation au premier ordre). Le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}^0$  est alors constant et l'équilibre d'une membrane linéairement élastique s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{h}\sigma_{\alpha\beta}^0\partial_{\alpha\beta}U + F = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.37)$$

• Dans le cas où la membrane est fixée à son bord  $\partial\Omega$  et soumise dans cet état initial à une tension  $T_0$  isotrope<sup>6</sup> le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}^0$  est diagonal, i.e.  $\mathbf{h}\sigma_{\alpha\beta}^0 = T_0\delta_{\alpha\beta}$  et l'équation d'équilibre prend la forme suivante :

$$T_0\Delta U = -F, \text{ dans } \Omega, \quad U = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.38)$$

C'est cette forme canonique qui est appelée abusivement *modèle de membrane linéaire élastique* bien que la forme adéquate soit (1.37).

• Dans le cas des déplacements modérés, les équations d'équilibre décrivant d'une membrane élastique sont appelées équations de Monge-Ampère, et s'écrivent à partir des équations de von Kármán (1.14) :

$$\begin{cases} [\boldsymbol{\Theta} + \chi; U] + F = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta^2\chi = -[U; U] & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \chi = \partial_n \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.39)$$

### 1.3 Modèle des poutres linéaires et non-linéaires

**Définition 1.3.1** *L'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^3$  est toujours rapporté à une base orthonormée directe  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soit un segment  $\Omega$  contenu dans la droite  $x_2 = 0$ . Une **poutre droite de section constante** est un milieu continu solide déformable occupant en l'absence de forces extérieures un ouvert contenu dans un domaine cylindrique de la forme*

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq \sqrt{x_2^2 + x_3^2} < \frac{h}{2} \text{ \& } x_1 \in \Omega\},$$

où la section de la poutre est petite devant la longueur de  $\Omega$ , et  $\Omega$  est appelé la **ligne moyenne** de la poutre.

---

<sup>6</sup>on posera pour simplifier  $T_0 = -1$ .

---

Le lecteur pourra consulter [84] et [26] pour l'établissement équations d'équilibres ci-dessous. Ce sont Leonhard Euler et Daniel Bernoulli (vers 1750) qui émirent la première théorie des poutres en posant les deux hypothèses (dites d'Euler-Bernoulli) suivantes :

1. au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne ;
2. les sections droites restent planes (pas de gauchissement).

La première hypothèse permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion. Ces hypothèses sont l'équivalent 1D des hypothèses de Love-Kirchhoff. En se restreignant à un mouvement dans le plan engendré par les vecteur  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , le déplacement est :

$$w\vec{e}_1 + u\vec{e}_2,$$

donc le tenseur des déformation et le tenseur de courbure sont

$$\epsilon := w' + \frac{1}{2}(u')^2 + x_2 u'', \quad \kappa = u''.$$

Nous considérons une poutre élastique dont la configuration initiale (prise comme référence) occupe un segment  $\Omega$  contenu dans la droite  $x_2 = 0$ . La poutre est fixée à ses bords, cette configuration initiale est un équilibre.

Supposons que cette poutre soit soumise à un champ de forces linéiques extérieures verticales  $f\vec{e}_3$ , et un chargement au bord d'intensité  $\lambda$ . Alors en notant  $u$  le champ de déplacement vertical (la flèche) l'équilibre s'écrit :

$$u^{(4)} - \lambda u'' = f. \tag{1.40}$$

Puis sous l'hypothèse des petites perturbations l'équilibre d'une poutre élastique devient :

$$u^{(4)} = f. \tag{1.41}$$

Pour une poutre élastique simplement appuyée sur  $\partial\Omega$ , les conditions au bord sont

$$u|_{\partial\Omega} = 0 = u''|_{\partial\Omega}, \tag{1.42}$$

tandis que les conditions au bord d'encastrement sont

$$u|_{\partial\Omega} = 0 = u'|_{\partial\Omega}. \tag{1.43}$$

## Chapitre 2

# LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE MEMBRANE EN PETITES DEFORMATIONS

### 2.1 Introduction

*"Ne vous laissez pas impressionner par le poids des traditions, même honorées en de nombreux lieux et par plusieurs générations. Ne croyez pas quelque chose par ce que beaucoup de gens en parlent. Ne vous en remettiez pas à l'autorité des sages d'autrefois. N'accordez pas foi à votre imagination en croyant qu'un Dieu vous a inspiré. Ne croyez rien qui dépende uniquement de votre maître ou des prêtres. Ne croyez, après examen, que ce que vous avez vous-même mis à l'épreuve et avez trouvé juste et bon." Le Bouddha. Sidarta Gautama*

Le but de ce chapitre est de donner un état des lieux sur le problème de contact unilatéral sans frottement d'une membrane élastique fixée, ou à déplacements imposés, sur son bord, soumise à un champ de forces, alors qu'elle est tendue au dessus d'un obstacle rigide. On s'intéresse ici à un champ de déformations linéarisées, ne prenant pas en compte les termes non-linéaires de variations de métrique. Bien que ce problème ait été étudié depuis les années 50 par Lions, Lewy, Stampacchia, Frehse, Schaeffer, Kindelehrer pour prouver des résultats d'existence, d'unicité, de régularité, de stabilité ...etc, de nombreuses questions restent ouvertes encore aujourd'hui. La difficulté essentielle vient de l'obstacle qui se traduit par une inégalité donnant lieu à un Problème à Frontière Libre (PFL). En effet la zone de contact entre la membrane et l'obstacle apparaît comme une inconnue à part entière dans notre problème. Nous sommes donc rendus à trouver à la fois la frontière libre et le champ de déplacements. Après avoir présenté un ensemble de résultats classiques sur la solution en déplacement, nous étudierons les propriétés topologiques et géométriques de la zone de contact. Ces questions étant très délicates nous nous emploierons à fournir des exemples de non-régularité. Il faut d'ores et déjà souligner que l'étude de l'ensemble de coïncidence en tant que variété fait l'objet d'une conjecture [116] (*Conjecture de Schaeffer* - 1974) qui est toujours non-résolue en dimension finie quelconque. Cependant grâce aux techniques de « blow-up » introduites par L. Caffarelli et les publications de R. Monneau nous démontrerons que cette conjecture est vraie en dimension 2, pour un chargement constant. Enfin nous nous focaliserons sur la question de la *continuation* proprement dite (i.e le suivi de la solution quand le champ de forces appliquées varie). Nous verrons comment la notion de dérivée

---

conique est reliée à la géométrie de la zone de contact. Cet état des lieux impliquant de nombreux points techniques, nous choisissons de le présenter et commenter les résultats (lemmes, propositions, théorèmes) les plus significatifs.

## 2.2 La formulation faible

Pour décrire le phénomène de contact entre une membrane linéaire élastique est un obstacle (voir figure 1), nous nous plaçons sous les hypothèses suivantes :

1. Au dessous de la membrane est placé un obstacle rigide. Il est représenté par le graphe de la fonction  $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}e_3$ . Donc nous imposons à  $U$ , le *déplacement normal*, de vérifier :

$$\begin{cases} U = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega. \\ U \geq \psi \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

2. Nous supposons, toujours, sauf mention explicite du contraire que  $\psi$  a au moins la régularité  $\mathbb{H}^1(\Omega)$
3. Le contact entre la membrane et l'obstacle s'effectue *sans frottement*.
4. En l'absence de forces extérieures, i.e.  $F = 0$ , la membrane est plane, le problème est donc sans contact pour des forces suffisamment faibles.
5. L'ensemble des points où la membrane touche l'obstacle est appelé la zone contact ou ensemble de coïncidence et on le note  $\mathcal{I}(F)$ , (ou plus simplement  $\mathcal{I}$ ). La frontière libre de ce problème est  $\partial\mathcal{I}(F)$ .

On cherche alors quelle est la position d'équilibre de la membrane représentée par le déplacement  $U$  sous les contraintes ci-dessus, i.e une solution au problème faible :

$$\begin{cases} U \in \mathbb{K}_{\psi,G} \\ \int_{\Omega} \nabla U \nabla (V - U) d\Omega \geq - \int_{\Omega} F(V - U) d\Omega \\ \forall V \in \mathbb{K}_{\psi,G} \end{cases} \quad (2.2)$$

Où nous avons introduit :

$$\mathbb{K}_{\psi,G} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

qui désigne l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles (noté  $\mathbb{K}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté), puis  $\mathbb{H}_G^1$  l'espace de Sobolev des classes de fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  égales à  $G$  sur  $\partial\Omega$  et dont la dérivée est de carré intégrable sur  $\Omega$ . Signalons au passage que l'ensemble  $\mathbb{K}_{\psi,G}$  est un convexe fermé.

**Théorème 2.2.1** Soient  $\Omega$  un domaine borné à bord lipschitz,  $F \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  et  $G \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ .

► Alors le problème (2.2) admet une unique solution :  $U \in \mathbb{H}_G^1(\Omega)$ .

► De plus le problème faible (2.2) est équivalent au problème de minimisation de l'énergie potentielle  $J(V, F)$ , sous les contraintes ci-dessus, c'est à dire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{K}_{\psi, G} \text{ minimisant} \\ \int_{\Omega} |\nabla V|^2 + 2FV \, d\Omega, \text{ sur } \mathbb{K}_{\psi, G}. \end{cases} \quad (2.3)$$

► Si une fonction  $U$  minimise  $J(V, F) := \int_{\Omega} |\nabla V|^2 + 2FV \, d\Omega$  sur  $\mathbb{K}_{\psi, G}$  elle minimise aussi

$$J^+(V, F) := \int_{\Omega} |\nabla V|^2 + 2F[V]^+ \, d\Omega, \text{ sur } \mathbb{H}_G^1(\Omega).$$

**Preuve :** ♦ Le problème a une solution unique, grâce au théorème de Lions-Stampacchia [90], car  $\mathbf{a}(U, V) = \int_{\Omega} \nabla U \nabla (V - U) \, d\Omega$  est une forme bilinéaire coercive sur  $\mathbb{H}_G^1(\Omega)$ , et  $\mathbb{K}_{\psi, G} \neq \emptyset$ . ♦

**Remarque 2.2.1** Quand  $F$  suffisamment petit et  $G > \psi$  sur  $\partial\Omega$  nous retrouvons l'équilibre<sup>1</sup> (bilatéral) 1.37. Le problème mécanique auquel je me suis d'abord intéressé, est (2.2) avec un obstacle plan et une membrane fixée à son bord, i.e  $\psi \equiv \text{constante}$  et  $G = 0$ . On peut légitimement affaiblir ces hypothèses en considérant des fonctions suffisamment régulières (i.e  $\psi \in C^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{H}^1$ , obstacle régulier ou bien présentant des coins, des plis ;  $G \in C^2, \mathbb{H}^{1/2}$  déplacements imposés au bord). Enfin  $G > \psi$ , signifie que le bord de la membrane est strictement au dessus de l'obstacle, i.e sans contact préalable avec l'obstacle. Quant à l'hypothèse  $F \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  ou  $L^2$ , elles est également cohérente avec la mécanique, et elle sera renforcée par la suite pour l'étude de la régularité de la zone de contact.

Dans [113] il est montré que (2.2) est bien posé au sens d'Hadamard, c'est dire :

**Théorème 2.2.2** Avec les notations du Théorème 2.2.1, l'application de  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ , qui à  $F$  associe l'unique solution de (2.2), est Lipschitz continue. C'est à dire qu'étant donné  $F_i$  pour  $i = 1, 2$ , il existe  $C > 0$  indépendant de  $F_i$ , telle que, en notant  $U_i$  la solution associée à  $F_i$ , on ait :

$$\|U_1 - U_2\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq C \|F_1 - F_2\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}$$

**Remarque 2.2.2** Ce théorème est conséquence du fait que la solution du problème d'obstacle (2.2) est la projection orthogonale (au sens du produit scalaire défini par  $\mathbf{a}$  sur  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ )

<sup>1</sup>avec la convention de signe simplificatrice  $\mathbf{T}_0 = -1$ .

de la solution bilatérale<sup>2</sup>  $\Delta U^b = F$  sur  $\Omega$  et  $U^b = G$  sur  $\partial\Omega$ , i.e.  $U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(U^b)$ . Cette observation sera capitale dans les questions de continuation.

Une formulation différente de (2.2) (dite « en potentiel ») pour une membrane linéaire, consiste à « emmancher » une membrane sur un obstacle  $\hat{\psi}$  et s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{U} \in \mathbb{K}_{\hat{\psi}, G} \\ \int_{\Omega} \nabla \hat{U} \nabla (V - \hat{U}) d\Omega \geq 0 \\ \forall V \in \mathbb{K}_{\hat{\psi}, G} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

**Proposition 2.2.1** *Soit  $\Psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  et  $\hat{\psi} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ . Etudier le problème (2.2) revient à étudier le problème (2.4) et réciproquement, pourvu que nous trouvions  $U^b$  tel que  $F := \Delta U^b \in L^2(\Omega)$  et  $U^b = 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\hat{\psi} := U^b + \psi$  tel que  $\hat{\psi}|_{\partial\Omega} < G$ .*

## 2.3 Régularité de la solution

On a vu que sous des hypothèses raisonnables sur les données la solution  $U$  est dans  $\mathbb{H}_G^1(\Omega)$ . Mais ceci est assez faible car on n'a même pas  $\mathbb{W}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$  et donc  $U$  n'est pas *a priori* continue. Cette section tente de répondre à la question : Qu'en est-il, avec des hypothèses supplémentaires, de la continuité et de la différentiabilité à l'ordre un et deux ? Nous compilons et commentons des résultats énoncés et démontrés dans les livres de J. F. RODRIGUES [113], de D. KINDELERHER & G. STAMPACCHIA [82], et dans l'article de R. MONNEAU [98].

### 2.3.1 Quelques résultats classiques

Par un argument de type pénalisation nous avons les estimations suivantes ([113], theorem 3.4) :

**Théorème 2.3.1** *Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^{1,1}$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ , pour  $p \geq 2$ ,  $\psi \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega)$ , et  $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$ ,  $\psi < G$  sur  $\partial\Omega$ . Alors  $U$  solution de (2.2) vérifie :*

$$-F \leq -\Delta U \leq \sup(-F, -\Delta\psi) \text{ sur } \Omega, \quad (2.5)$$

$U \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbb{H}_g^1(\Omega)$ , donc si  $p > 2$   $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , avec  $0 < \alpha = 1 - \frac{2}{p}$ .

De plus l'application  $F \mapsto U(F)$  est continue i.e.  $(F_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^p}} F) \implies (U_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{2,p}}} U)$ , avec

$$\|U\|_{\mathbb{W}^{2,p}} \leq C \left( \|F\|_{L^p} + \|[-\Delta\psi + F]^+\|_{L^p} \right).$$

<sup>2</sup>Cette solution bilatérale sera notée au besoin  $U^b = \Delta^{-1}F$ .



---

**Commentaires 2.3.1** • Cependant en général on n'a pas :  $\|U_1 - U_2\|_{\mathbb{H}^2} \leq C\|F_1 - F_2\|_{L^2}!!!$

• Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 (i.e. pour des données suffisamment régulières)  $U$  est continue, donc on peut définir (sans recourir à la notion de capacité<sup>3</sup>) l'ensemble de coïncidence comme

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

• La solution  $U$  peut être  $C^{1,\alpha}$  mais ne peut être, en général, de classe  $C^2(\Omega)$ , comme le montre l'exemple suivant.

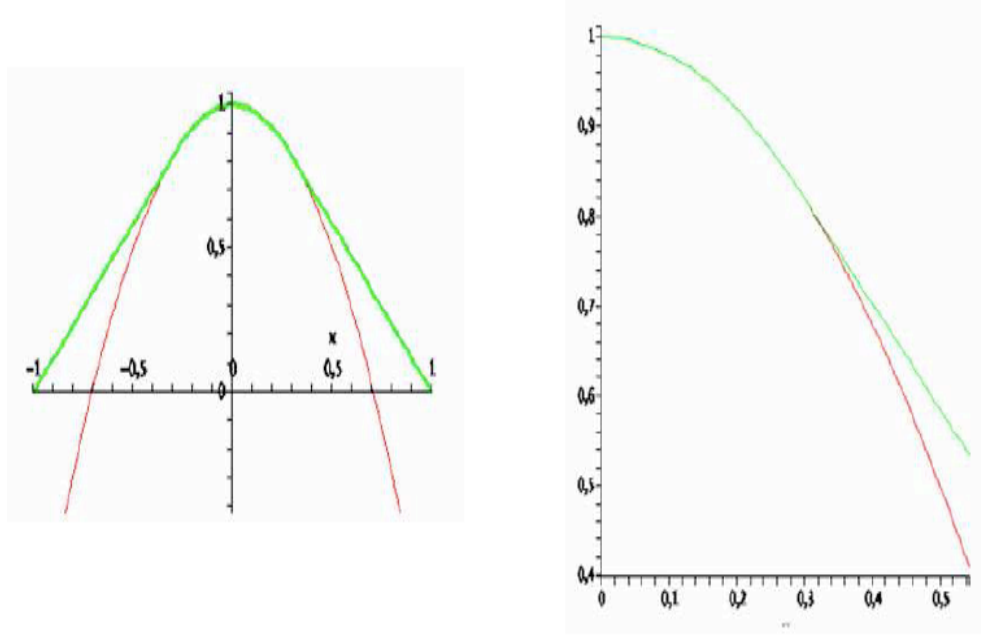


FIG. 2.1 – allure du graphe de la solution de (2.2) pour  $\psi(r) := 1 - 2r^2$

**Exemple 2.3.1** Soient  $\Omega := \mathbb{B}(0, 1)$ ,  $\psi$  l'obstacle strictement concave radial  $\psi(r) := 1 - 2r^2$ ,  $U = 0$  sur  $\partial\Omega := \mathbb{S}^1(0, 1)$ . Donc  $U$  la solution de (2.2) vérifie  $U = \psi$  sur  $\overline{\mathbb{B}}(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$  et linéaire en dehors de ce disque ; il est clair qu'aux points de  $\mathbb{S}^1(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$  les dérivées secondes de  $U$  ont un saut.

$$U(r) := \begin{cases} 1 - 2r^2, & \text{si } r \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -4(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})r + 1 + 2(1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})) & \text{si } r \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Remarque 2.3.1** Bien que la solution de (2.2) ne soit pas deux fois différentiable, on peut tout de même avoir un résultat de régularité portant sur sa différentielle seconde  $D^2(u)$ , comme le montre le théorème suivant (le plus fin que je connaisse) dû à J. Frehse [58] (1973) :

---

<sup>3</sup>a priori la zone de contact pour  $U \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  est définie comme le complémentaire de l'ouvert  $\{X \in \Omega / (U - \psi)(X) > 0\}$ , l'inégalité étant prise au sens de  $\mathbb{H}^1$  (c.f. [82], définition 6.7, page 43.)

---

**Théorème 2.3.2** Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan à bord  $C^{2,\alpha}$ ,  $G \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ , avec  $0 < \alpha < 1$ , et  $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$ , avec  $\psi < G$ , sur  $\partial\Omega$ . Alors l'unique solution  $U$  de (2.2) est telle que  $U \in \mathbb{W}_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  c'est à dire :

$$D^2(U) \in L_{loc}^\infty(\Omega), \text{ et donc } U \in C^{1,1}(\overline{\Omega}).$$

**Idée de la Preuve :** ♦ L'astuce de H. ALT & D. PHILIPS [9] consiste en l'estimation des dérivées secondes de  $U$  au voisinage de la frontière libre par l'application du Théorème 2.3.3 dans une certaine boule, ayant au préalable montré grâce au principe du maximum (inégalité de Harnack), que  $U - \psi > 0$  sur  $\mathbb{B}(x^0, r)$  avec  $r$  bien choisi et donc que  $\Delta U = F$  sur  $\mathbb{B}(x^0, r)$ .

Comme la solution est de classe  $C^{1,\alpha}(\Omega)$  et  $U - \psi \geq c > 0$  sur  $\partial\Omega$ , on a l'inclusion stricte  $\omega_\delta := \{x \in \Omega / 0 < \text{dist}(x, \mathcal{I}) < \delta_0\} \subset\subset \Omega$ . Rappelons le résultat suivant que l'on trouve démontré dans [71] Théorème 9.22, page 246 :

**Théorème 2.3.3** [71] Pour tout  $0 < \alpha < 1$ , soit  $F \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}(x^0, r)})$  et soit  $v$  vérifiant :

$$\Delta v = F \text{ dans } \mathbb{B}(x^0, r).$$

Alors il existe une constante  $C = C(\Omega, \alpha)$  telle que

$$r^2 \|D^2 v\|_{L^\infty(\mathbb{B}(x^0, r/2))} \leq C \left( \|D^2 v\|_{L^\infty(\mathbb{B}(x^0, r))} + r^2 \|F\|_{L^\infty(\mathbb{B}(x^0, r))} + r^{\alpha+2} |F|_{\alpha, \mathbb{B}(x^0, r)} \right).$$

- Estimation sur  $\omega_\delta$ . Avec l'estimation elliptique intérieure ci-dessus :  $\|D^2 U\|_{L^\infty(\mathbb{B}(x^0, r/2))} \leq C_0$  dès que  $\mathbb{B}(x^0, 4r) \subset \Omega$  ce qui est vérifié pour  $\delta_0$  assez petit donc  $\|D^2 u\|_{L^\infty(\omega_{\delta_0})} \leq C_0$ .

- Estimation sur  $\partial\mathcal{I}$ . Comme  $U \geq \psi$  sur  $\Omega$ , par continuité du gradient de  $U$ , il vient  $\nabla(U - \psi) = 0$  sur  $\mathcal{I}$ .

**Lemme 2.3.1** ([25] prop. IX.5) Soit  $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ , alors  $[v - \psi]^+ \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  et

$$\partial_i [v - \psi]^+ = \partial_i (v - \psi) \cdot \mathbf{1}_{\{v > \psi\}} \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Et donc pour tout  $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$   $\partial_i v = \partial_i (v) \cdot \mathbf{1}_{\{v=0\}}$  p.p. sur  $\Omega$ .

D'après le Théorème 2.3.1 nous sommes assurés que  $\nabla(u - \psi) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ , donc par le lemme 2.3.1 nous savons que le gradient de  $v = \nabla(u - \psi)$  est nul, i.e.  $D^2(U - \psi) = \nabla \nabla(U - \psi) = 0$  p.p. sur  $\{\nabla(U - \psi) = 0\}$ , donc en particulier presque partout sur  $\mathcal{I}$ .

- Estimation sur  $\Omega \setminus (\omega_{\delta_0} \cap \partial\mathcal{I})$ . A distance finie du bord on conclut par une estimation intérieure grâce au Théorème 2.3.3.

D'où le résultat. ♦

**Remarque 2.3.2** Le théorème ci-dessus ne peut pas être relaxé, en général, pour  $F \in L^2(\Omega)$  ni même  $F \in C^0(\Omega)$ ! Une des questions ouvertes du problème de l'obstacle membranaire est de savoir ce que l'on pourrait dire pour  $F \in L^\infty(\Omega)$ , i.e bornée, et  $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$ , par exemple...

### 2.3.2 Sur la régularité de $\partial\Omega$

Puisque  $U \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega)$  il vient par les théorèmes d'injections de Sobolev classiques [1] que  $U \in C^0(\overline{\Omega})$ , si  $\dim \Omega \leq 3$ . Or comme nous supposons que  $U > \psi$  sur  $\partial\Omega$ , par continuité il vient que  $U > \psi$  sur  $\mathcal{V}_\epsilon$ , un  $\epsilon$ - $\Omega$ -voisinage de  $\partial\Omega$ . Ainsi

$$\Delta U = F \quad \text{sur } \mathcal{V}_\epsilon \text{ et } U \in \mathbb{K}_{\psi,G}.$$

De plus, grâce à la théorie standard des opérateurs elliptiques, ceci implique que  $U$  est « aussi régulier » dans  $\mathcal{V}_\epsilon$  que le permettent les données  $\partial\Omega$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $\psi$  [6].

Nous pouvons affaiblir les hypothèses sur la régularité de bord du domaine  $\Omega$ , puisque la membrane ne touche pas l'obstacle sur un  $\epsilon$ - $\Omega$ -voisinage de  $\partial\Omega$ , noté  $\mathcal{V}_\epsilon$ . Pour ce faire, nous allons utiliser les résultats de régularité de P. Grisvard sur un ouvert polygonal à coins convexes (et non pas à coins rentrants car ils génèrent des singularités locales), voir [73] et [74].

**Définition 2.3.1** Un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  est  $C^{k,\alpha}$ -polygonal à coins convexes si son bord est de classe  $C^{k,\alpha}$  par morceaux, i.e. si  $\partial\Omega := \coprod_{0 \leq i \leq p} \Gamma_i$  avec  $\Gamma_i \in C^{k,\alpha}$  et si les sommets (intersections des  $\Gamma_i$ ) admettent un  $\Omega$ -voisinage convexe.

**Théorème 2.3.4** Soit  $\Omega$  un domaine  $C^{2+k,\alpha}_{mcx}$ -polygonal à coins convexes,  $k \geq 0$ ,  $F \in \mathbb{H}^k(\Omega)$ , (resp.  $F \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ ) et  $G \in \mathbb{H}^{k+3/2}(\partial\Omega)$ , (resp.  $G \in C^{2+k,\alpha}(\Omega)$ ). Soit  $U$  solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta U = F & \text{sur } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

Alors  $U \in \mathbb{H}^{2+k}(\Omega)$  (resp.  $U \in C^{2+k,\alpha}(\overline{\Omega})$ )

Nous en déduisons le Théorème suivant :

**Théorème 2.3.5** Soit  $\Omega$  un domaine  $C^{2,\alpha}$ -polygonal à coins convexes,  $F \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ . Alors la solution de (2.2) vérifie :

$$U \in C^{1,1}(\overline{\Omega}).$$

**Preuve :** ♦ Rappelons que par hypothèse  $U > \psi$  sur  $\partial\Omega$ . Soit  $\mathcal{V}_\epsilon$ , un  $\epsilon$ - $\Omega$ -voisinage de  $\partial\Omega$ , et désignons par  $\partial_{int}\mathcal{V}_\epsilon$  le bord intérieur de  $\mathcal{V}_\epsilon$  supposé lisse ; son bord extérieur étant  $\partial\Omega$ . Introduisons une fonction  $G_\epsilon \in \mathbb{H}^{3/2} \cap C^{1,1}(\partial_{int}\mathcal{V}_\epsilon)$  et notons  $u_{int}$  l'unique solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta u_{ext} = F & \text{sur } \mathcal{V}_\epsilon \\ u_{ext} = G_\epsilon & \text{sur } \partial_{int} \mathcal{V}_\epsilon \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous savons que  $u_{ext} \in \mathbb{H}^2 \cap C^{1,1}$  sur  $\mathcal{V}_\epsilon$ , d'après le Théorème 2.3.4, donc en particulier si  $G_\epsilon = U$ . Soit  $u_{int}$  l'unique solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta u_{int} \geq F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon \\ 0 \leq (u_{int} - \psi) \perp \mu \geq 0 & \text{sur } \mathcal{V}_\epsilon \\ u_{int} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_{int} = G_\epsilon & \text{sur } \partial_{int} \mathcal{V}_\epsilon \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous savons, d'après le Théorème 2.3.2 que  $u_{int} \in C^{1,1}$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon$ , pour tout  $F_\epsilon \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ . Nous pouvons choisir  $G_\epsilon = U$  et  $F_\epsilon$  pour que  $u_{int} = U$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon$ . Puisque la solution  $U$  est unique alors il vient comme annoncé que  $U \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ . ♦

### 2.3.3 Réaction sur la zone de contact

La formulation faible (2.2) peut se réécrire comme suit :

$$\mathbf{a}(U, \zeta) \geq \mathbf{l}(F, \zeta), \quad \forall \zeta \geq \psi \text{ avec } \zeta \in \mathbb{H}_G^1(\Omega) \quad (2.10)$$

Où  $\mathbf{a}$  est la forme bilinéaire définie sur  $\mathbb{K}_{\psi,g} \times \mathbb{K}_{\psi,g}$  représentant le travail des efforts intérieurs et  $\mathbf{l}(F, \zeta)$  la forme linéaire définie sur  $\mathbb{K}_{\psi,g}$  représentant le travail des efforts extérieurs. D'après le théorème de Riesz-Schwarz cela assure que  $\mathbf{a}(U, \zeta) - \mathbf{l}(F, \zeta)$  définit une mesure de Radon positive  $\mu(F)$  sur  $\Omega$ , si bien que l'on ait :

$$\int_{\Omega} \nabla U \nabla \zeta d\omega + \int_{\Omega} F \zeta d\Omega = \int_{\Omega} \zeta d\mu(F) \quad (2.11)$$

On montre facilement que  $\Delta U = F$  sur l'ouvert  $\Omega \setminus \mathcal{I}(F)$ , donc que le support de  $\mu(F)$  est contenu dans  $\mathcal{I}(F)$ , ce qui signifie que la réaction de l'obstacle est localisée dans la zone de contact. De ces quelques observations et du théorème 2.3.1, il découle :

**Proposition 2.3.1** *Soient  $\Omega$  un domaine borne lipschitzien du plan,  $g \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ ,  $F \in L^2(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , avec  $\psi < g$ , sur  $\partial\Omega$ . Alors  $\mu := \mu(F)$  est une mesure à densité. Donc en particulier elle ne charge pas les points, et l'on a*

$$d\mu = (F - \Delta U) d\Lambda_2.$$

*De plus il y a équivalence entre (2.2) et (NCP) (nonlinear complementary problem), i.e :*

$$(NCP) : U \geq \psi \quad , \quad \mu \geq 0 \quad \& \quad \mu \cdot [U - \psi] = 0, \text{ presque partout sur } \Omega. \quad (2.12)$$

Dans [82] il est montré qu'en général  $\text{Cap}_1$  est plus fine que  $\mu$ , et on en déduit que la zone de contact est définie à un ensemble de 1-capacité nulle.

**Théorème 2.3.6** Soient  $F \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ . Soient  $U$  solution de (2.2) et  $\mu(F)$  la mesure de réaction associée. Alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\mu(F)(E) \leq C\sqrt{\text{Cap}_1(E)}, \quad \forall E \subset \Omega \text{ compact.}$$

En particulier, si  $\text{Cap}_1(E) = 0$  alors  $\mu(F)(E) = 0$ , et donc si  $\text{Cap}_1(\mathcal{I}(F)) = 0$ , alors

$$\Delta U = F \text{ sur } \Omega.$$

### 2.3.4 Equation d'Euler-Lagrange & Formulation Forte

Nous établissons, maintenant, les équations d'Euler-Lagrange associées au problème faible (2.2).

**Proposition 2.3.2** Supposons que  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\Omega$  un ouvert borné du plan à bord  $C^{1,1}$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , et  $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$  avec  $\psi < G$  sur  $\partial\Omega$ , alors  $U$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Delta U & = & F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F) \\ U & \geq & \psi & \text{sur } \Omega. \\ U & = & G & \text{sur } \partial\Omega. \\ U & = & \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ \nabla U & = & \nabla\psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right. \quad (2.13)$$

**Preuve :** ♦ Par le théorème de Rellich-Kondračov des injections de Sobolev,  $u$  et  $\nabla u$  sont dans  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ . En particulier  $U$  est continue sur  $\overline{\Omega}$  donc l'ensemble  $\{U > \psi\} := \Omega \setminus \mathcal{I}(F)$  est ouvert. Alors par intégration par parties de (2.2) on tire par densité :

$$\Delta U = F \text{ sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F).$$

De  $U \geq \psi$  sur  $\Omega$  vient que  $\nabla U = \nabla\psi$  sur  $\partial\mathcal{I}(F)$  puisque  $U \in C^1(\overline{\Omega})$ . ♦

**Commentaires 2.3.2** Dans les équations ci-dessus on n'a pas d'informations sur le fait que le contact membrane-obstacle soit ou non tangent. Pour que l'on puisse l'écrire il faut que  $\partial_n U$  existe sur  $\partial\mathcal{I}(F)$ , il alors est impératif que  $\partial\mathcal{I}(F)$  soit une courbe régulière, ce qui est faux de façon générale ! Il en existe des contre-exemples célèbres comme nous le verrons plus loin. Ceci a une importance capitale pour établir l'équivalence formulation forte / formulation faible :

---

**Formulation forte :** Trouver une fonction  $U$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta U & = & F \text{ sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U & \geq & \psi \text{ sur } \Omega. \\ U & = & G \text{ sur } \partial\Omega. \\ U & = & \psi \text{ sur } \partial\mathcal{I}(F) : (Dirichlet). \\ \partial_n U & = & \partial_n \psi \text{ sur } \partial\mathcal{I}(F) : (Neumann). \end{array} \right. \quad (2.14)$$

La condition de Neumann ci-dessus signifie que la membrane a un contact tangent avec l'obstacle.

## 2.4 Topologie et mesure de l'ensemble de coïncidence

### 2.4.1 Nécessité d'une hypothèse de non-dégénérescence

Pour autant que les données du problème (2.2) soient suffisamment régulières, nous savons que  $U$  est continue donc  $\mathcal{I}(F)$  est un compact. Nous nous ne pouvons pas espérer de régularité *a priori* sur la frontière libre si nous ne faisons pas « une hypothèse de non-dégénérescence ». En effet, concentrons nous sur le cas d'un contact avec réaction nulle  $\mu(F) = 0$  (c'est le cas du *contact affleurant*) avec des données  $\Omega$ ,  $F$ ,  $G$ , et  $\psi$  de classe  $C^\infty$ . Alors l'ensemble de coïncidence peut être vu comme l'ensemble des zéros d'une fonction lisse et nous savons d'après le théorème de Whitney que n'importe quel fermé de  $\Omega$  peut être l'ensemble des zéros d'une fonction de classe  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . Il est immédiat de vérifier que l'ensemble de coïncidence peut être égal à n'importe quel compact de  $\Omega$  donc que  $\mathcal{I}(F)$  peut être aussi irrégulier que l'on veut ! Nous allons montrer que l'hypothèse ci-dessous est indispensable pour retrouver de la régularité.

**Hypothèse de non-dégénérescence :**  $F - \Delta\psi \geq \delta_0 > 0$  p.p. sur  $\Omega$ . (2.15)

### 2.4.2 Mesure de la frontière libre

Malgré ce qui vient d'être dit, nous avons tout de même des informations sur la mesure de la frontière libre et sa régularité si les données sont suffisamment régulières (voir [113] theorem 8.3). Le résultat historique suivant date de 1981 et est dû à L. A. Caffarelli [29] :

**Théorème 2.4.1** Soient  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ,  $G \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap \mathbb{W}^{1,1}(\Omega)$  (avec  $0 < \alpha < 1$ ) et  $\psi \in C^{1,1}(\Omega) \cap \mathbb{W}_{loc}^{3,1}(\Omega)$ , avec  $\psi(x) < G(x)$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ . Faisons l'hypothèse de non-dégénérescence :

$$(F - \Delta\psi) \geq \delta_0 > 0 \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors la frontière libre  $\partial\mathcal{I}(F)$  de  $U$  solution de (2.2) est de mesure de 1-Hausdorff (notée  $\mathcal{H}_1$ ) finie, donc de mesure de Lebesgue (surfacique  $\Lambda_2$ ) nulle, i.e. pour toute une boule  $\mathbb{B} \subset \Omega$

$$(\mathcal{H}_1(\partial\mathcal{I}(F) \cap \mathbb{B}) \leq C(\mathbb{B})) \implies (\Lambda_2(\partial\mathcal{I}(F)) = 0) \quad (2.16)$$

**Esquisse d'une Preuve pour le Théorème 2.4.1 :** ♦ Nous esquissons les grandes lignes de la preuve de la nullité de la mesure de Lebesgue en adaptant (pour une force et un obstacle réguliers) celle donnée dans [97] (pour une force et un obstacle constants). Elle se décompose en les 3 lemmes suivants :

**Lemme 2.4.1** (*Lemme de non dégénérescence*) Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.4.1 on a  $\Delta U = F$  sur  $\{U > \psi\}$  et de plus pour tout  $x_0 \in \partial\{U > \psi\}$ , alors

$$\sup_{x \in \mathbb{B}(x_0, r)} (U - \psi)(x) \geq r^2/4, \text{ pour } \mathbb{B}(x_0, r) \subset \Omega. \quad (2.17)$$

**Preuve du lemme 2.4.1 :** ♦ Cela provient du principe du maximum pour la fonction  $w(x) = (U - \psi)(x) - \frac{1}{4}\|x - x^0\|^2$ , pour  $x^0 \in \{U > \psi\}$ , puis par continuité pour  $x^0 \in \partial\{U > \psi\}$ . ♦

Par application d'une formule de Taylor au voisinage de  $x^0 \in \partial\{U > \psi\}$  se déduit que  $\|\nabla U\|_{L^\infty(\mathbb{B}(x_0, r))}$ , en utilisant le lemme 2.4.1 et par l'inégalité des accroissements finis, on démontre :

**Lemme 2.4.2** (« Lemme de la petite boule positive ») Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.4.1, il existe  $\delta, r^0 > 0$  tel que  $x^0 \in \partial\mathcal{I}$ ,  $\forall r \in ]0, r^0[$ ,

$$\exists \mathbb{B}(y, \delta r) \subset \mathbb{B}(x^0, r), \quad U - \psi > 0 \text{ sur } \mathbb{B}(y, \delta r)$$

Nous allons conclure grâce au résultat suivant [61] théorème 2.9.11 page 158 :

**Lemme 2.4.3** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable, de mesure non-nulle. Alors pour presque tout  $x \in A$ ,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_n(\mathbb{B}(x, r) \cap A)}{\Lambda_n(\mathbb{B}(x, r))} = 1 = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_n(\mathbb{B}(x, r) \cap A)}{\Lambda_n(\mathbb{B}(x, r))}$$

Appliquons le Lemme précédant avec  $A := \mathcal{I}$  qui est compact donc mesurable. Si la mesure de Lebesgue de  $\partial\mathcal{I}$  est non nulle, alors il existe au moins un point  $x^0 \in \partial\mathcal{I}$  tel que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r) \cap A)}{\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r))} = 1$$

Or d'après le Lemme 2.4.2, il existe une boule  $\mathbb{B}(y, \delta r) \subset \mathbb{B}(x^0, r) \cap (\Omega \setminus \mathcal{I})$  telle que

$$\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r) \cap \partial\mathcal{I}) \leq \Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r)) - \Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, \delta r))$$

c'est à dire

$$\limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r) \cap A)}{\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r))} = 1 - \frac{\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, \delta r))}{\Lambda_2(\mathbb{B}(x^0, r))} = 1 - \delta^2 \dots$$

ce qui est absurde. ♦

**Remarque 2.4.1** Le résultat du Théorème 2.4.1 subsiste si nous ne supposons que

$$(F - \Delta\psi) \geq \delta_0 > 0 \text{ p.p. sur } \mathcal{I}(F).$$

**Corollaire 2.4.1** Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.4.1, la solution  $U$  vérifie :

$$\Delta U = F \mathbf{1}_{\{U > \psi\}} + \Delta\psi \mathbf{1}_{\{U = \psi\}} \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.18)$$

**Preuve :** ♦ On sait déjà que  $\Delta U \in L^\infty(\Omega)$ . Or on a que :

$$\Delta U = F \text{ sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F) := \{U < \psi\}$$

$$\Delta U = \Delta\psi \text{ sur } \overset{\circ}{\mathcal{I}(F)} := \text{Int}(\{U = \psi\})$$

En outre  $\Omega \setminus (\{U < \psi\} \cup \text{Int}(\{U = \psi\})) = \partial\mathcal{I}(F) = \partial \overset{\circ}{\mathcal{I}(F)}$  qui est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, d'où le résultat. ♦

**Commentaires 2.4.1** Les irrégularités sur la frontière libre peuvent-être de plusieurs natures. Nous savons qu'*a priori* la zone de contact peut être égale à n'importe quel compact, mais l'hypothèse de non-dégénérescence (2.15) assure que le bord est non-fractal. Cependant nous allons voir qu'il peut ne pas être une variété lisse, même sous (2.15)!!

Aussi définissons l'ensemble de coïncidence essentiel associé au problème d'obstacle (2.2) :

$$\mathcal{I}^* := \overline{\text{int}(\mathcal{I})}.$$

On peut observer que  $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^*$  est un *faux-ensemble de coïncidence*, au sens où c'est une partie de la zone de contact non chargée par la mesure de réaction. En effet, l'obstacle  $\psi$  peut-être remplacé par un autre  $\psi^* := \psi - \phi$ , avec  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , sans changer la solution du problème variationnel (2.2), mais alors maintenant  $\mathcal{I}^* = \{u = \psi^*\}$ . Ceci montre que  $\partial\mathcal{I} \setminus \partial\mathcal{I}^* = \partial\mathcal{I} \setminus \partial(\text{int}\mathcal{I})$  peut-être considéré comme non-essentiel ou  $(\Lambda_2)$ -négligeable. Ceci est cohérent avec le fait que la mesure de réaction ne charge pas les parties de mesure de Lebesgue nulle (cf. proposition 2.3.1 et théorème 2.3.6). Ceci apparaît très clairement sur la figure (2.3.2) ci-dessous, où évidemment on a :  $\mathcal{I}^* \neq \mathcal{I}$ .



### 2.4.3 Principe du maximum et topologie de l'ensemble de coïncidence

Comme nous l'avons déjà vu le principe du maximum (et ses variantes) permet de prouver le théorème 2.4.1. En fait il a de nombreuses implications qui permettent de comprendre comment une membrane se déforme, la plus simple et directe étant qu'une membrane se déforme dans le sens d'application des forces normales :

**Proposition 2.4.1** *Soit  $\Omega$  un domaine lipschitzien borné du plan. Soit  $U$  solution de (2.2), pour  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^1 \cap C^0(\Omega)$  et  $G \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ ,  $\psi < G$  sur  $\partial\Omega$ . Alors :*

►  $F \leq 0$  sur  $\Omega \implies U \leq G$ , p.p. sur  $\Omega$ .

► De plus  $\mathcal{I}(F) \subset \{x \in \Omega / U_\lambda^b(x) \leq \psi(x)\}$  où  $U^b$  est la solution du problème bilatéral suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U^b \in \mathbb{H}_G^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla U^b \nabla (v - U^b) d\Omega = - \int_{\Omega} F(v - U^b) d\Omega \\ \forall V \in \mathbb{H}_G^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Ce qui signifie que la zone de contact de (2.2) est contenue dans le domaine de  $\Omega$  où la solution du problème non contraint (2.19) dépasse l'obstacle  $\psi$ .

**Preuve :** ♦ Cela résulte de l'application directe du principe du maximum à  $U$ , puis du principe de comparaison entre  $U$  et  $(U - U^b)$ . ♦

**Proposition 2.4.2** *Avec les notations et hypothèse de la proposition 2.4.1, imposons l'hypothèse de non-dégénérescence (2.15), alors le complémentaire de la zone de contact  $\mathcal{N} := \Omega \setminus \mathcal{I}$  est connexe.*

**Preuve :** ♦ Il s'agit d'une adaptation de la preuve du Lemme 6.1. page 174 de [82]. Pour simplifier posons  $g = 0 > \psi$  sur  $\partial\Omega$ . Sachant que  $\partial\Omega$  est connexe alors il existe une unique composante connexe  $\omega \subset \Omega \setminus \mathcal{I}$  dont l'adhérence intersecte  $\partial\Omega$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une autre composante connexe  $\omega' \subset \Omega \setminus \mathcal{I}$ , alors nécessairement  $\partial\omega' \subset \mathcal{I}$ . Pour tout  $\zeta \in C_0^\infty(\omega')$ ,  $\zeta \geq 0$

$$\int_{\omega'} (\nabla(\psi - U)) \nabla \zeta d\omega' = - \int_{\omega'} (\Delta\psi + F) \zeta d\omega' \geq 0$$

Ainsi  $(\psi - U)$  est une supersolution d'une équation elliptique d'ordre 2, donc le principe du maximum implique  $(\psi - U)(x) \geq \inf_{\omega'} (\psi - U) \forall x \in \omega'$ . Or  $\partial\omega' \subset \mathcal{I}$  donc  $(\psi - U) \geq 0$  sur  $\omega'$  ce qui contredit  $\omega' \subset \Omega \setminus \mathcal{I}$ . ♦

**Remarque 2.4.2** Il est possible de montrer que le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{I}$  peut être quelconque même avec toutes les données de (2.2) lisses, pour des obstacles de formes quelconques (voir l'exemple [82] p. 182-183). En général, sans supposer (2.15), les composantes connexes peuvent être « trouées », bien qu'on puisse en limiter le nombre comme l'on montré L. Caffarelli & N. Rivière dans [31] :

---

**Proposition 2.4.3** [31] *Soit  $\Omega$  un  $C^{1,1}$ -ouvert connexe du plan. Soit  $U$  solution de (2.4), avec  $\hat{\psi} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ ,  $\hat{\psi}|_{\partial\Omega} < G := 0$ ,  $\Delta(\hat{\psi})$  et  $\nabla(\Delta(\hat{\psi}))$  ne s'annulent pas simultanément. Alors  $\Omega \setminus \hat{\mathcal{I}}$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

**Commentaires 2.4.2** Il existe quelques résultats sur la convexité de l'ensemble de coïncidence, en supposant au préalable que  $\Omega$  le soit. Ils ont été historiquement obtenus par A. FRIEDMAN & D. PHILIPS [60] en dimension deux, puis généralisés par B. KAWOHL [78] en toute dimension finie, et par R. MONNEAU, J. DOLBEAULT [100] pour des opérateurs elliptiques non-linéaires (dont l'opérateur de Monge-Ampère). Le théorème suivant s'établit grâce au principe du maximum en démontrant que le minimum de la courbure signée de  $\partial\mathcal{I}$  est plus grand que le minimum de la courbure signée de  $\partial\Omega$ . C'est une confirmation de la conjecture de Schaeffer, qui se trouve dans [100], proposition 2.

**Théorème 2.4.2** *Soit  $\Omega$  est domaine borné convexe du plan et  $\partial\Omega \in C^\infty$ . Soient  $t < 0$ ,  $U$  solution de (2.2), pour  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto t$ ,  $\psi \equiv 0$ , pour tout  $G > 0$  constante sur  $\partial\Omega$  l'ensemble de coïncidence  $\mathcal{I}_t := \{U = 0\}$  est convexe analytique.*

## 2.5 Géométrie de la frontière libre

L'analyse de la frontière libre nécessite de connaître certaines informations sur la topologie de l'ensemble de coïncidence et sur les données. C'est un problème vraiment délicat dans lequel s'est investi L. CAFFARELLI. Nous pouvons affirmer que sous des hypothèses suffisantes de régularité sur les données, nous disposons d'une description assez précise de la zone de contact et sa frontière. En particulier nous savons démontrer que les seules singularités sont de type « cusp », qu'elles sont en nombre fini sur chaque composante connexe de  $\mathcal{I}$ . D'un autre côté, D. KINDERLEHRER et L. NIREMBERG ont prouvé, grâce à la transformation de l'hodographe-Legendre, que si la frontière libre est localement un graphe  $C^1$ , alors sa régularité augmente quand on augmente celle des données. Enfin, D.G. SCHAEFFER a exhibé deux exemples de frontière libre présentant des singularités pour des domaines, des forces et des obstacles lisses. Dans l'objectif de suivi de courbe que nous nous sommes fixé, connaître la géométrie de  $\mathcal{I}$  en terme de régularité, est indispensable pour comprendre la stabilité de la solution par rapport au champ de forces. Ainsi nous ferons apparaître les liens existants entre le problème de continuation et la Conjecture de Schaeffer.

### 2.5.1 Transformation de l'hodographe-Legendre

**Définition 2.5.1** *Soit  $\mathcal{I}$  la zone de contact du problème (2.2). Un point  $X_o \in \mathcal{I}$  est  $C^k$ -régulier, si la frontière libre est localement le graphe d'une fonction  $\chi$  de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$  :*

$$\partial\mathcal{I} \cap \mathbb{B}(X_o, r) = \{X = (x_1, x_2) \in \Omega \mid x_2 = \chi(x_1)\}.$$

*Un point est dit singulier s'il n'est pas régulier.*

---

**Principe de la Transformation de l'hodographe-Legendre** Soit  $U$  la solution du problème (2.2). On introduit pour ce problème la transformation de l'hodographe-Legendre :

$$U(X) \xrightarrow{HL} w(Y)$$

$$\begin{cases} w(Y) = U(X) - x_1 y_2 \\ Y = (y_1, y_2) \text{ avec } y_1 = \partial_{x_1} U, \quad y_2 = x_2 \end{cases}$$

Ainsi la frontière libre est envoyée localement sur l'ensemble  $\{y_1 = \psi\}$  et l'ensemble  $\{U > \psi\}$  est envoyé localement sur  $\{y_1 > \psi\}$ . Il devient possible de traduire l'EDP sur  $u$  en une EDP sur  $w$ , de telle sorte que les estimées de Schauder classiques des EDP elliptiques avec conditions le bord  $y_1 = \psi$  s'appliquent et fournissent certaine régularité sur  $w$ . En remarquant que

$$x_1 = -\partial_{y_1} w$$

il vient que l'équation de la frontière libre est

$$x_1 = -\partial_{y_1} w(y_1 = 0, x_2)$$

et donc que la régularité de la frontière libre est celle de  $\nabla w$ .

C'est sur ce principe que se fonde la preuve du théorème suivant de D. KINDERLEHRER & L. NIREMBERG paru en 1978 [81].

**Théorème 2.5.1** *Soit  $\Omega$  un domaine borné du plan avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$ ,  $\psi \in C^\infty(\Omega)$  et  $\psi < 0 = G$  sur  $\partial\Omega$ . Soit  $U$  une solution du problème (2.2) avec  $F \in C^1$  dans un voisinage,  $\mathbb{B}(X_o, r)$ , d'un point régulier (au sens de la définition 2.5.1)  $X_o$  de la frontière libre. Alors dans ce voisinage*

- $$\begin{aligned} (i) & : \partial\mathcal{I} \cap \mathbb{B}(X_o, r) \in C^{1,\alpha}, \quad \forall \alpha \in ]0, 1[; \\ (ii) & : \partial\mathcal{I} \cap \mathbb{B}(X_o, r) \in C^{m+1,\alpha}, \quad \forall m \geq 1, \alpha \in ]0, 1[, \text{ avec } F \in C^{m,\alpha}; \\ (iii) & : \partial\mathcal{I} \cap \mathbb{B}(X_o, r) \text{ est analytique pourvu que } F \text{ et } \psi \text{ soient analytiques.} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Avec ce théorème il apparaît que plus régulières sont les données, plus régulière est la frontière libre en dehors des points singuliers.

## 2.5.2 Points singuliers et réguliers de la frontière libre

### 2.5.2.1 Exemples de singularités

Dans un article de 1976, D. G. SCHAEFFER donne deux exemples d'apparition de singularités sur la frontière libre et ce même quand les données sont régulières !

**Cadre :** On se donne un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  à bord régulier  $C^\infty$  et un obstacle  $\psi$  analytique. On se concentre sur le problème

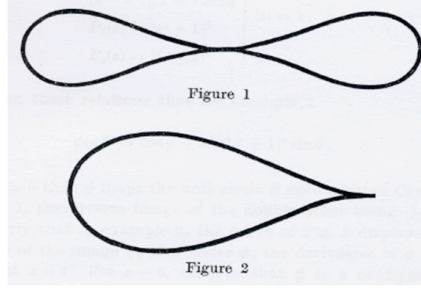


FIG. 2.2 –  $\partial\mathcal{I}_j(0)$  :  $j = 1; 2$  deux exemples de singularités

$$\inf_{v \in \mathbb{K}_{\psi, g=0}} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \quad (2.21)$$

On se convainc facilement que la solution  $u^*$  du problème de minimisation ci-dessus est harmonique sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}(0)$  et s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ . De plus  $u^*$  vérifie la surdétermination de Dirichlet-Neumann

$$u^* \equiv \psi \text{ sur } \mathcal{I}(0), u^* = \psi \text{ et } \nabla u^* = \nabla \psi \text{ sur } \partial\mathcal{I}(0) \quad (2.22)$$

puisque' on sait que  $u^*$  est  $C^1(\partial\mathcal{I}(0))$ .

Réciproquement, si  $\mathcal{I}(0) \subsetneq \Omega$  est de classe  $C^1$  par morceaux, la solution  $u^*$  est donnée par :

$$\check{u} = \begin{cases} u^*(x_1, x_2) & \text{sur } \Omega - \mathcal{I}(0) \\ \psi(x_1, x_2) & \text{sur } \mathcal{I}(0) \end{cases}$$

Pourvu que  $u \geq \psi$  sur  $\Omega - \mathcal{I}(0)$  et  $\Delta\psi \leq 0$  sur  $\mathcal{I}(0)$ .

Ainsi  $u^*$  est uniquement déterminée par l'inclusion différentielle :

$$-\Delta u^* + \mathfrak{b}(u - \psi) \ni 0 \quad (2.23)$$

Où  $\mathfrak{b}$  est le graphe maximal monotone suivant :

$$\mathfrak{b}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v > 0 \\ ] - \infty, 0[ & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément que  $\check{u}$  est solution de l'inclusion différentielle ci-dessus. De là D. Schaeffer construit  $\mathcal{I}(0)$  avec la singularité voulue et alors détermine une solution vérifiant (2.22).

Avec un obstacle analytique on peut obtenir le type de singularité de la figure 2.3.2. Intuitivement on explique son origine comme suit. Soient deux obstacles  $\Psi^l$  et  $\Psi^r$  analytiques, qui fournissent des zones de contact disjointes, bordées par deux courbes de Jordan analytiques. Puis considérons la famille d'obstacles à un paramètre  $\{\alpha\Psi^l(1-\alpha)\Psi^r\}$  ayant un ensemble de coincidence à deux composantes connexes bornées par deux courbes de Jordan analytiques.

En faisant varier le paramètre  $\alpha$  entre 0 et 1, l'une des deux composantes connexes peut soit disparaître soit fusionner avec l'autre et donner  $\mathcal{I}_\alpha(0)$ , c'est ce dernier cas qui se produit dans l'obtention de la figure 2.3.2, où le point double consiste en deux courbes tangentes.

**La frontière libre :** On se place dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ , on utilise la notation complexe  $z = x_1 + ix_2$ .  $\psi$  est l'obstacle, soit alors  $h$  holomorphe sur  $\Omega - \mathcal{I}_j(0)$  et  $h \equiv \partial_1 \psi - i\partial_2 \psi$  sur le bord  $\mathcal{C}_j$  de la frontière libre représentée par la (figure 2.3.2).

On choisit  $\tilde{\psi}(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)/2$  comme obstacle.

$\mathcal{C}_j$  est décrit par :

$$\begin{aligned} \Phi_j : \mathbb{S}^1(0, 1) &\longrightarrow \mathcal{C}_j \\ \Phi_j &:= (z + z^{-1})/2 + \epsilon P_j(z - z^{-1})/2, \quad \epsilon \in \mathbb{R} \\ P_1(z) &:= z^2 + 2 + z^{-1} : \text{ pour } \mathcal{C}_1 \text{ et pour } \mathcal{C}_2 : P_2(z) := (z^2 + 2 + z^{-1})^2 \end{aligned}$$

A présent regardons la courbe de Jordan  $\mathcal{J}_j$ , qui contient  $\mathcal{C}_j$  dans son intérieur géométrique, décrite par :

$$\Phi_j : \mathbb{S}^1(0, 2) \longrightarrow \mathcal{J}_j$$

Soit alors  $\mathcal{I}_j$  le compact dont le bord est  $\mathcal{C}_j$  et soit  $\Omega_j$  l'ouvert de  $\Omega$  dont le bord est  $\mathcal{J}_j$ . Il suit du théorème de Cauchy que l'application  $\Phi_j$  de la couronne  $\mathfrak{C}(0, 1, 2) := \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 2\}$  vers  $\Omega_j \setminus \mathcal{I}_j$  est bijective.

**La solution :** Avec le choix effectué de l'obstacle, il vient que  $h_j(z) = -\bar{z}$  sur  $\mathcal{I}_j$ , d'où l'on déduit (via  $\Phi_j$ ) que

$$h_j(z) = -\Phi_j\left(\Phi_j^{-1}(z)\right) \text{ et qu'elle est analytique sur } \Omega_j - \mathcal{I}_j.$$

On définit alors sans ambiguïté une fonction holomorphe :

$$\tilde{u}_j := \operatorname{Re} \int_{\Omega - \mathcal{I}_j(0)} h_j(z) dz, \text{ avec } h_j \equiv \partial_1 \tilde{u}_j - i\partial_2 \tilde{u}_j.$$

Il en vient  $\nabla \tilde{u}_j = \nabla \tilde{\psi}$  sur  $\mathcal{C}_j$ , puis par un choix approprié de la constante d'intégration on peut s'arranger pour avoir  $\tilde{u}_j = \tilde{\psi}$  sur  $\mathcal{C}_j$ . On peut alors prouver que

$$\tilde{u}_j > \tilde{\psi} \text{ sur } \Omega \setminus \mathcal{I}_j(0) \cup \partial\Omega.$$

Pour avoir une solution nulle sur le bord de  $\Omega$ , on considère alors la solution  $V_j$  de :

$$\begin{cases} \Delta V_j = \tilde{u}_j & \text{sur } \Omega \quad \left( \text{non juste sur } \Omega - \mathcal{I}_j(0)! \right) \\ V_j = \tilde{u}_j & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On prend un nouvel obstacle  $\psi_j := \tilde{\psi} - V_j$  qui est réel analytique, super harmonique et vérifie  $\psi_j < 0$  sur  $\partial\Omega$ . On en déduit que  $u_j^* := \tilde{u}_j - V_j$  est harmonique sur  $\Omega - \mathcal{I}_j(0)$ , satisfait  $u_j^* > \psi_j$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}_j(0)$ , vérifie (2.22) et s'annule sur  $\partial\Omega$ . Enfin on conclut que  $\mathcal{I}_j(0)$  est la zone de contact du problème d'obstacle  $\psi$ .

**Commentaires 2.5.1** Nous verrons qu'en fait les seules singularités qui peuvent apparaître sur la frontière libre - sous l'hypothèse de non-dégénérescence - sont des points cuspidaux<sup>4</sup> (dits singularités de Whitney, points de rebroussement ou encore cusps).

### 2.5.2.2 Conjecture sur la régularité générique de la frontière libre

**Conjecture de Schaeffer [116]** : " We conjecture that generically the weak solution of the (n-dimensional)-obstacle problem that one obtains variationally is a strong solution, by which we mean that the free boundary  $\partial\mathcal{I}(F)$  is a  $C^\infty$ -smooth (n-1)-manifold."

**Remarque 2.5.1** Cette conjecture (pour des données lisses) est consistante en toute dimension finie  $n$ . Elle ne nous concerne que pour le cas  $n = 2$ . Une réponse partielle dans un cas simple est donnée par R. MONNEAU dans [99] ; nous verrons le résultat et un raffinement à la section 2.6, après avoir introduit les outils nécessaires.

**Remarque 2.5.2** Dans la Conjecture de Schaeffer, la notion de généricité à laquelle il est fait référence est de nature topologique (au sens de Baire), car l'espace des fonction  $C^\infty(\Omega)$  est un espace de Fréchet et qu'on sait que tout espace de Fréchet est un espace de Baire.

### 2.5.2.3 L'exemple historique de Lewy-Stampacchia - 1969 [89]

Autant l'annoncer tout de suite, les résultats de régularité sur l'ensemble de coïncidence sont rares et difficiles à prouver. En ce sens ceux que l'on trouve dans le livre dans [82] et [113] dans le cas d'une membrane strictement convexe sont précieux car très précis, ils sont quasiment les seuls de la littérature ! Le théorème suivant décrit la déformation qu'induit l'application d'un obstacle strictement concave sur une membrane strictement convexe tendue au dessus de lui, sans forces extérieures. Clairement sa solution, n'est pas de classe  $C^2(\Omega)$ .

**Théorème 2.5.2** Soient  $\Omega$  un domaine strictement convexe du plan tel que  $\partial\Omega$  soit de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $p \geq 2$ ,  $\hat{\psi} \in C^{p,\alpha}(\Omega)$ ,  $\hat{\psi}$  étant un obstacle strictement concave tel que  $\max_{\Omega} \hat{\psi} > 0$  et  $\hat{\psi}|_{\partial\Omega} < 0$ . Alors l'ensemble de coïncidence  $\hat{\mathcal{I}}$  du problème (2.4) avec  $G = 0$ , vérifie les propriétés :

1.  $\hat{\mathcal{I}}$  est un compact, connexe, simplement connexe du plan, égal à la fermeture de son intérieur qui est également connexe ;
2.  $\partial\hat{\mathcal{I}}$  est une courbe simple de Jordan  $C^{p-1,\alpha}$  ;
3.  $\Omega \setminus \hat{\mathcal{I}}$  est homéomorphe à un anneau.

<sup>4</sup> Un point cuspidal,  $c$ , d'une courbe définie implicitement comme l'ensemble des zéros d'une fonction de deux variables  $f$ , est tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. & f(x_c, y_c) = 0, \\ 2. & \partial_x f(x_c, y_c) = \partial_y f(x_c, y_c) = 0, \\ 3. & \text{La matrice de Hessienne } f \text{ en } c \text{ est singulière.} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

La forme normale d'un cusp est  $x^3 - y^2 = 0$ , courbe qui peut être paramétrée par  $x = t^2, y = t^3$ .

### 2.5.3 Les « blow-up » & les Théorèmes de L. Caffarelli

Dans cette section nous allons nous intéresser aux points réguliers et singuliers (au sens de la Définition 2.5.1) de la frontière libre. Mais avant cela, rappelons nous que l'ensemble de coïncidence peut avoir de nombreuses composantes connexes et même une infinité avec des points d'accumulations [82] ! Aussi, il est nécessaire de restreindre l'analyse aux composantes connexes de l'ensemble de coïncidence.

Pour simplifier la présentation nous considérerons le problème (2.2) sous les hypothèses suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \partial\Omega, F, \text{ et } \psi \text{ sont supposés lisses avec } G = 1 > \psi \text{ sur } \partial\Omega, \\ F - \Delta\psi \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Nous savons que nous ne pouvons pas étudier la géométrie de la frontière sans l'hypothèse de non-dégénérescence, d'autre part nous pourrions chercher à affaiblir les conditions de régularité sur les données, mais ceci est peu étudié dans la littérature, et n'apporterait rien de plus à notre discours, puisque nous visons à mieux comprendre la conjecture de Schaeffer pour (2.2). Signalons qu'à notre connaissance, on ne sait pas étudier la géométrie de la frontière libre de (2.2) dans le cas de chargement  $F \in L^2(\Omega)$ ...

#### 2.5.3.1 Notions et résultats classiques sur les « blow-up »

L.CAFFARELLI est le premier à avoir introduit la notion de « blow-up » comme outil d'analyse des singularités de la frontière libre qu'il a abondamment étudiées par la suite.

**Définition 2.5.2** *Un « blow-up » de la solution  $U$  de (2.2) en  $X^o$ , est la suite de fonctions  $u_{X^o}^{\varepsilon_k}$  définie par :*

$$u_{X^o}^{\varepsilon_k} := \frac{U(X^o + \varepsilon_k X)}{\varepsilon_k^2} \text{ quand } \varepsilon_k \rightarrow 0$$

Lorsque cela n'introduira aucune ambiguïté, on notera simplement :

$$\varepsilon_n = \varepsilon, \quad u_{X^o}^{\varepsilon_n} = u^\varepsilon.$$

En particulier

$$D^2 u^\varepsilon(X) = D^2(U)(X^o + X\varepsilon), \text{ et donc } \|D^2 u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = \|D^2 U\|_{L^\infty(\Omega)} < C_0.$$

On a que  $u^\varepsilon$  vérifie (2.2) sur  $\frac{\Omega - X_o}{\varepsilon}$ . Si de plus  $X_o \in \mathcal{I}$ , alors  $U(X^o) = \psi(X^o) = u^\varepsilon(0)$  et  $\nabla U(X^o) = \nabla \psi(X^o) = \nabla u^\varepsilon(0)$ . Ainsi en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 on déduit :

$$\left| \begin{array}{ll} \|D^2 u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{B}(0,r))} & \leq C_o; \\ \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{B}(0,r))} & \leq C_o r; \\ \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{B}(0,r))} & \leq C_o r^2/2; \\ \sup_{X \in \mathbb{B}(0,r)} u^\varepsilon(X) & \geq \frac{r^2}{4}. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

**Proposition 2.5.1** *Supposons (2.25). Soient  $U$  solution de (2.2) et un blow-up  $u_{X^\circ}^{\varepsilon_{k_m}}$  vérifiant (2.26). Nous pouvons trouver une fonction  $u_{X^\circ}^0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vérifiant  $-\Delta u_{X^\circ}^0 = F \mathbf{1}_{\{u_{X^\circ}^0 > \psi(X^\circ)\}}$ ,  $u^0 \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^2$  et (2.26) tel que  $0 \in \{u_{X^\circ}^0 = \psi(X^\circ)\}$ , et une sous-suite  $(u_{X^\circ}^{\varepsilon_{k_m}})_m$  telle que pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^2$  on ait :*

$$\|u^{\varepsilon_{k_m}} - u_{X^\circ}^0\|_{C^1(K)} \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0$$

**Remarque 2.5.3** La fonction limite  $u_{X^\circ}^0$  est appelée **limite du blow-up**  $u_{X^\circ}^{\varepsilon_{k_m}}$ . Cette limite n'est pas unique a priori puisqu'elle dépend de l'extraction choisie...

**Preuve :** ♦ Pour un rayon fixé  $R > 0$ , on a l'estimation (2.26), alors on peut appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli, qui nous fournit une fonction limite  $u^0$  et une sous-suite convergeant vers  $u^0$  sur  $\mathbb{B}(0, R)$ . Puis en considérant une suite croissante vers l'infini de rayon  $R_m$ , par une extraction diagonale on a l'existence d'une sous-suite convergeant vers  $u^0$  en norme  $C^1(\mathbb{B}(0, R))$  et ce pour tout  $R > 0$ . Donc  $u^0$  satisfait à (2.26), d'où  $0 \in \{u_{X^\circ}^0 = \psi(X^\circ)\}$ . De plus  $u^0$  satisfait (2.2) car la suite  $(u_{X^\circ}^{\varepsilon_{k_m}})_m$  le vérifie. Enfin on montre (grâce à la convergence uniforme de  $(u_{X^\circ}^{\varepsilon_{k_m}})_m$  vers  $u^0$  sur les compacts de  $\mathbb{R}^2$ ) que

$$\Delta u_{X^\circ}^0 = F(X^\circ), \text{ sur } \{u_{X^\circ}^0 > \psi(X^\circ)\}. \diamond$$

**Commentaires 2.5.2** La classification des limites de blow-up a d'abord été faite en dimension 2 par L. Caffarelli et N. Rivière dans un article de 1977 [32] par une estimation de la croissance des dérivées secondes de la solution de (2.2) via le principe du maximum et le théorème de Liouville. En 1999, G. Weiss donna une preuve différente par une formule de monotonie. Nous en donnons une variante pour (2.2), qui n'est qu'une réécriture du Théorème et de la preuve de [97] dans le cas d'une force non constante, pour la dimension 2.

**Théorème 2.5.3 (FORMULE DE MONOTONIE)** *Supposons (2.25). Soient  $U$  la solution de (2.2),  $X^\circ \in \Omega$  avec  $\mathbb{B}(X^\circ, r_o) \subsetneq \Omega$ . Soit*

$$\Phi_{U, X^\circ}(r) := \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}(X^\circ, r_o)} \left[ \frac{1}{2} |\nabla U|^2 + FU \right] - \frac{1}{r^5} \int_{\partial \mathbb{B}(X^\circ, r_o)} U^2$$

*Alors  $\Phi_{U, X^\circ} \in C^1(]0, r_o[)$  et*

$$\frac{d}{dr} \Phi_{U, X^\circ}(r) = \int_{\partial \mathbb{B}(X^\circ, r_o)} \left| e_r \cdot \nabla \frac{U(X)}{\|X - X^\circ\|^2} \right|^2 d\Omega \geq 0,$$

*avec  $e_r := \frac{X - X^\circ}{\|X - X^\circ\|}$ . En particulier l'application  $r \mapsto \Phi_{U, X^\circ}(r)$  est croissante.*



---

**Preuve :** ♦ Notons pour simplifier  $X^o := 0$ , puis notons  $\Psi_U(r) := \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}_r} \frac{1}{2} \|\nabla U\|^2 + FU d\Omega$  et  $u_X^\varepsilon := \frac{U(\varepsilon X)}{\varepsilon^2}$ . Par l'invariance par changement d'échelle :

$$\Psi_U(r) = \Psi_{u^\varepsilon}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right),$$

d'où

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \Psi_{u^\varepsilon}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right)_{|\varepsilon=1} = 0,$$

autrement dit

$$-r \frac{d}{dr} \Psi_U(r) + \frac{d}{d\varepsilon} \left( \Psi_{u^\varepsilon}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right)_{|\varepsilon=1} = 0,$$

mais

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi_{u^\varepsilon}(r) \Big|_{|\varepsilon=1} = \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}_r} \nabla U \cdot \nabla V + FV d\Omega,$$

avec

$$V := X \cdot \nabla U - 2U,$$

donc

$$\frac{d}{dr} \Psi_U(r) = \frac{1}{r^5} \left( \int_{\mathbb{B}_r} V \left[ -\Delta U + F \right] + \int_{\mathbb{S}_r} V \nabla_n U \right),$$

or

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U &= F \quad \text{quand } U > \psi, \\ V &= 0 \quad \text{quand } U = \psi, \end{array} \right.$$

ainsi

$$V \left[ -\Delta U + F \right] \equiv 0.$$

Puisque  $D^2U \in L_{loc}^\infty(\Omega)$  toutes les dérivations sont licites, et il en découle :

$$\frac{d}{dr} \Psi_U(r) = \frac{1}{r^5} \left( \int_{\mathbb{S}_r} \left[ r \partial_r U - 2U \right] \partial_r U \right).$$

Posons  $w := \frac{U}{r^2}$ , et calculons  $\partial_r U = 2rw + r^2 \partial_r w$  puis  $\partial_r U - 2U = r^3 \partial_r w$  en réinjectant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Psi_U(r) &= \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} r^3 \partial_r w \left[ 2rw + r^2 \partial_r w \right] \\ &= I + \int_{\mathbb{S}_r} (\partial_r w)^2, \end{aligned}$$

avec

$$I = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}_r} \partial_r (w^2) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} U^2 \right),$$

ce qui donne la simplification « miraculeuse »

$$\frac{d}{dr} \Phi_{U,0}(r) = \int_{\mathbb{S}_r} (\partial_r w)^2,$$

puisque

$$\Phi_{U,0}(r) = \Psi_{U,0}(r) - \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} U^2.$$

Ce qui termine la preuve.  $\blacklozenge$

Appliquons cela aux blow-up, en suivant [97] :

**Théorème 2.5.4** *Supposons (2.25). Soient  $U$  la solution de (2.2),  $X^o \in \partial(\Omega \setminus \mathcal{I}(F))$ , et  $u_{X^o}^0$  une limite de blow-up en  $X^o$ . Alors :*

*$u_{X^o}^0$  est homogène de degré 2, et*

$$\Phi_{u_{X^o}^0, X^o}(r) = \text{constante} = \lim_{R \rightarrow 0^+} \Phi_{U, X^o}(R).$$

**Remarque 2.5.4** Il en découle que l'ensemble  $\{u_{X^o}^0 = \psi(X^o)\}$  est un cône.

**Preuve [97] :**  $\blacklozenge$  Pour une sous-suite nous sommes assurés de la convergence dans  $C_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$  :  $u_{X^o}^{\varepsilon_{k_m}} \rightarrow u_{X^o}^0$ , donc pour  $r > 0$  fixé  $\Phi_{u_{X^o}^{\varepsilon_{k_m}}, 0}(r) \rightarrow \Phi_{u_{X^o}^0, 0}(r)$ . De l'invariance par changement d'échelle  $\Phi_{u_{X^o}^0, 0}(r) \rightarrow \text{constante} = \Phi_{U, X^o}(0^+) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \Phi_{U, X^o}(R)$ , cette limite existe grâce au Théorème de monotonie 2.5.3, et elle est finie en vertu des majorations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \|D^2 U\|_{L^\infty(\mathbb{B}(X^o, r))} \leq C_o; \\ \|\nabla U\|_{L^\infty(\mathbb{B}(X^o, r))} \leq C_o r; \\ \|U\|_{L^\infty(\mathbb{B}(X^o, r))} \leq C_o r^2/2. \end{array} \right.$$

Donc pour tout  $R > 0$ ,  $\Phi_{U, X^o}(R) \geq -c > -\infty$ , ce qui justifie bien que  $\Phi_{u_{X^o}^0, 0}(r) = \Phi_{U, X^o}(0^+)$ . De plus

$$\frac{d}{dr} \Phi_{u_{X^o}^0, 0}(r) = \int_{\mathbb{S}_r} \left( \partial_r \left( \frac{u_{X^o}^0(X)}{\|X\|^2} \right) \right)^2,$$

alors  $\frac{u_{X^o}^0(X)}{\|X\|^2}$  ne dépend que de  $\theta = \frac{X}{\|X\|}$ , i.e.  $u_{X^o}^0(X) = \|X\|^2 w(\frac{X}{\|X\|})$ . CQFD.  $\blacklozenge$

Grâce au théorème de Liouville<sup>5</sup>, on montre que si la mesure l'ensemble de  $\{u^0 = \psi(X^o)\}$  est nulle, il existe une matrice  $Q$  positive, symétrique  $2 \times 2$  de trace  $\text{tr}(Q) = F(X^o)$  telle que  $u^0(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X \geq 0$ . Rappelons que la limite de blow-up vérifie le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U^0 & = F(X^o) \mathbf{1}_{\{u^0 > \psi(X^o)\}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^2. \\ u^0 & \geq \psi(X^o) \quad \text{sur } \mathbb{R}^2. \\ u^0 & \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2). \end{array} \right. \quad (2.27)$$

**Théorème 2.5.5** *Toute fonction harmonique bornée sur  $\mathbb{R}^2$  est constante.*

Sous l'hypothèse (2.25), toutes les solutions de (2.2) sur  $\mathbb{R}^2$  qui sont homogènes de degré 2 peuvent être classifiées. L. Caffarelli a montré que seules deux formes de solutions sont possibles telles que  $0 \in \{u^0 = \psi\}$  :

$$u^0(X) = \frac{1}{2} {}^tX \cdot Q_{X^o} \cdot X \geq 0 \text{ avec } Q_{X^o} \text{ une matrice positive } 2 \times 2 \text{ / } \text{tr}(Q_{X^o}) = F(X^o) \quad (S)$$

$$u^0 = \frac{1}{2} \left( \max [0, X \cdot \nu] \right)^2, \text{ avec } \nu \text{ un vecteur unitaire.} \quad (R)$$

A posteriori, on peut montrer que les limites de la forme (R) sont associées à des blow-up pour des points  $X^o \in \mathcal{I}(F)$  réguliers, alors que celles de la forme (S) correspondent à des points singuliers au sens de la Définition 2.5.1. La référence [99] (Théorème 1.9 et Théorème 2.1) donne la classification suivante :

**Théorème 2.5.6** (CARACTÉRISATION DES LIMITES "SIMPLES" DE BLOW-UP)

Soient  $U$  la solution de (2.2),  $X^o \in \partial(\Omega \setminus \mathcal{I}(F))$ . Supposons (2.25), alors :

- Ou bien  $\lim_{R \rightarrow 0^+} \Phi_{u_{X^o, X^o}^0}(R) = 2\alpha > 0$ , alors  $X^o$  est **un point singulier de la frontière libre** et donc  $u^0$  est une forme quadratique, i.e

$$u^0(X) = \frac{1}{2} {}^tX \cdot Q_{X^o} \cdot X \geq 0$$

où  $Q_{X^o}$  (dépendant a priori de l'extraction de la sous-suite) est une matrice symétrique  $2 \times 2$  positive de trace  $\text{tr}(Q_{X^o}) = F(X^o)$ .

- Ou bien  $\lim_{R \rightarrow 0^+} \Phi_{u_{X^o, X^o}^0}(R) = \alpha > 0$ ,  $X^o$  est **un point régulier de la frontière libre** et donc il existe un vecteur unitaire  $\nu := \nu_{X^o} \in \mathbb{S}^1$  (dépendant a priori de l'extraction de la sous-suite) tel que

$$u^0 = \frac{1}{2} \left( \max [0, X \cdot \nu] \right)^2.$$

**Commentaires 2.5.3** On écrit  $\mathcal{I}(F) := \mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ , où  $\mathfrak{R}$  désigne l'ensemble des points réguliers, et  $\mathfrak{S}$  désigne l'ensemble des points singuliers.

Nous avons souligné qu'a priori les limites de blow-up dépendent de l'extraction choisie. Mais en fait, les limites de blow-up en un point  $X^o \in \partial\mathcal{I}(F)$  sont toutes d'une seule forme (R) ou bien (S). En 1980, L. CAFFARELLI établit par l'inégalité de Harnak que le pour la forme (R)  $\nu_{X^o}$  est indépendant de l'extraction sous (2.25). En conséquence, les limites de blow-up sont indépendantes de l'extraction et l'application  $X^o \mapsto \nu_{X^o}$  est continue sur l'ensemble  $\mathfrak{R}$ . Il en vient que la frontière libre est localement une  $C^1$ -courbe sur le sous ensemble  $\mathfrak{R}$ . De plus d'après le Théorème 2.5.1 de Kinderlehrer - Nirenberg on sait que cette courbe est en fait  $C^\infty$  sous les conditions (2.25). Il a fallu attendre 1998 pour que, par des arguments de compacité, L. CAFFARELLI démontre l'indépendance à l'extraction pour les points singuliers sous (2.25), puisqu'en fait la limite de blow-up  $u^0$  est *unique* et ne dépend que du point  $X^o$  de la frontière libre, [27].

### 2.5.3.2 Théorème du critère d'extrême finesse

**Définition 2.5.3** *L'épaisseur de l'ensemble de coïncidence en un point  $X^o \in \{U = \psi\}$  de la solution  $U$  de (2.2) est :*

$$ep_r(X^o) := \frac{1}{r} \mathbf{dm}(\{U = \psi\} \cap \mathbb{B}(X^o, r))$$

où le diamètre minimal d'un ensemble, noté  $\mathbf{dm}(\cdot)$ , est l'infimum des distances entre deux paires d'hyperplans parallèles déterminant une bande contenant cet ensemble, avec  $\mathbb{B}(X^o, r)$  la boule de centre  $X^o$  et de rayon  $r$ .

Grâce à cette définition, nous pouvons énoncer un critère géométrique de L. CAFFARELLI [29] affirmant *grosso modo* que si la zone de contact a une épaisseur finie non nulle en un point  $X^o$  alors  $X^o$  est régulier, plus précisément :

**Théorème 2.5.7** *Supposons (2.25). Soient  $U$  la solution de (2.2), pour tout  $r > 0$ , il existe une épaisseur critique  $\bar{ep}_r$ , avec  $\bar{ep}_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ , telle que si :*

$$ep_r(X^o) > \bar{ep}_r$$

*pour un point  $X^o \in \partial\mathcal{I}$  et pour un rayon  $r > 0$ , alors le point  $X^o$  est  $C^1$ -régulier. De plus la fonction  $\bar{ep}_r$  ne dépend que de  $\|D^2u\|_{L^\infty(\Omega)}$  et de  $\text{dist}(X^o, \partial\Omega)$ .*

**Remarque 2.5.5** Dans l'esquisse de preuve du théorème 2.4.1, nous avons établi le lemme 2.4.1 « de la petite boule positive ». Une conséquence de ce lemme est que l'ouvert  $\Omega \setminus \mathcal{I}$  ne peut pas avoir de pointes en forme de cusp, puisqu'on peut trouver une boule de rayon non-nul aussi proche que l'on veut de son bord. Cependant le théorème 2.5.7 assure que des singularités apparaissent sur la frontière libre  $\partial\mathcal{I}$  quand elle s'éfile jusqu'à ne plus avoir d'épaisseur (même si nous faisons l'hypothèse de non-dégérescence) !

### 2.5.3.3 Sur le nombre de points singuliers de la frontière libre

En conséquence du théorème 2.5.1, L. CAFFARELLI, & N. RIVIÈRE [31] montrèrent en 1975 le Théorème suivant :

**Théorème 2.5.8** *Dans le problème (2.2), supposons (2.25). Soit  $\mathcal{C}$  une composante connexe de l'intérieur de  $\mathcal{I}$ , alors  $\partial\mathcal{C}$  est lisse sauf en un fini de points singuliers, et les seules singularités qui peuvent survenir sur  $\partial\mathcal{C}$  sont des cusps.*

En 2003, R. MONNEAU a encore affiné les résultats précédents en proposant une nouvelle formule de Monotonie déduite du Théorème 2.5.3, voir [99], nous en donnant une version plus générale (avec (2.25)) en suivant la preuve de [97].

---

**Théorème 2.5.9** (FORMULE DE MONOTONIE POUR LES POINTS SINGULIERS) *Supposons (2.25). Soient  $U$  la solution de (2.2),  $X^o \in \mathfrak{S}$  un point singulier avec  $\mathbb{B}(X^o, r_o) \subset\subset \Omega$ . Soit  $v(X) := \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X$ , où  $Q$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  telle que  $\text{tr} Q = F(X^o)$ . Alors l'application*

$$\Psi_{U, X^o}^v : r \longmapsto \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{B}(X^o, r)} (U(X^o + X) - v(X))^2 dX$$

*est croissante.*

**Preuve :** ♦ Considérons une fonction  $v$  telle que pour tout  $r > 0$   $\Phi_{v,0} = 2\alpha = \Phi_{U, X^o}(0^+)$ , ce que vérifie le  $v$  du Théorème. Alors

$$\Phi_{U, X^o}(r) - \Phi_{U, X^o}(0^+) = \Phi_{U, X^o}(r) - \Phi_{v,0}(r).$$

Désignons par  $w := U(X^o + \cdot) - v$ . En faisant des intégrations par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi_{U, X^o}(r) - \Phi_{v,0}(r) &= \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}_r} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \nabla v \cdot \nabla w + Fw - \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w^2 + 2vw, \\ &= \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}_r} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + (F - \Delta v)w - \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w^2 + \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} rw \nabla_n v - 2vw, \\ &= \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}_r} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + (F - \Delta v)w - \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w^2 + \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w(X \cdot \nabla v - 2v), \\ &\quad - \frac{1}{r^4} \int_{\mathbb{B}_r} \frac{1}{2} |w \Delta w + (F - \Delta v)w + \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w(X \cdot \nabla v - 2v) + J, \end{aligned}$$

avec

$$J := \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} \frac{r}{2} w \nabla_n w - w^2,$$

que l'on peut exprimer sous la forme

$$J = \frac{r}{4} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w^2 \right).$$

Or

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w^2 \right) = \frac{4}{r} (\Phi_{U, X^o}(r) - \Phi_{U, X^o}(0^+) + \frac{2}{r^5} \int_{\mathbb{B}_r} (w \Delta w - 2(F - \Delta v)w) - \frac{4}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w(X \cdot \nabla v - 2v).$$

Grâce à la formule de monotonie nous savons que :  $\Phi_{U, X^o}(r) - \Phi_{U, X^o}(0^+) \geq 0$  et comme le  $v$  est choisi homogène de degré 2 :  $(X \cdot \nabla v - 2v) = 0$  tout en vérifiant  $-\Delta v = F$ . Par ailleurs

$$w \Delta w(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } U(X^o + X) > \psi(X^o + X) \\ v & \text{si } U(X^o + X) = \psi(X^o + X) \end{cases} \geq 0,$$

et donc finalement

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^5} \int_{\mathbb{S}_r} w^2 \right) \geq 0,$$

ce qui achève la preuve. ♦

En appendice de [99] grâce à cette formule de monotonie R. Monneau retrouve à son tour l'unicité des limites de blow-up en les points singuliers de la frontière libre de (2.2) sous (2.25). Précisons néanmoins que I. BLANK a mis en défaut l'unicité de la limite de blow-up d'un point régulier si  $F$  n'est que continue [16]. Toujours dans [99], en Corollaire de cette formule de monotonie, on trouve que la forme générale d'un point singulier  $X^o$  d'une solution  $U$  (2.2) sous (2.25) est :

$$U(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot D^2 U(X^o) \cdot X + o(\|X - X^o\|^2).$$

Dans [117], D. Schaeffer observe : « Dans nos exemples (...) les points exceptionnels se situent tous sur l'axe réel avec au plus deux points exceptionnels par composantes ». Grâce à la formule (2.5.9), R. Monneau [99] éclaire cette observation par la classification suivante :

**Théorème 2.5.10** Dans le problème d'obstacle (2.2), supposons (2.25).

► Désignons par  $\mathcal{C}^*$  une composante connexe de l'ensemble de coïncidence essentiel  $\mathcal{I}^*(F) := \overline{\text{int}(\mathcal{I}(F))}$ .

Alors il existe une constante

$$\varrho^* := \varrho^*(\|D^2(u)\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{dist}(\mathcal{C}^*, \partial\Omega)) > 0$$

telle que :

- (i) Si  $\text{diam}(\mathcal{C}^*) < \varrho^*$ , alors  $\partial\mathcal{C}^*$  est lisse excepté peut être en au plus deux points singuliers.
- (ii) Si  $\text{diam}(\mathcal{C}^*) \geq \varrho^*$ , et si  $X^1, X^2 \in \partial\mathcal{C}$  sont deux points singuliers, alors  $|X^1 - X^2| \geq \frac{\varrho}{2}$ .

► Désignons par  $\mathcal{C}$  une composante connexe de l'ensemble de coïncidence  $\mathcal{I}(F)$ .

Alors il existe une constante

$$\varrho := \varrho(\|D^2(u)\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{dist}(\mathcal{C}, \partial\Omega)) > 0$$

telle que  $\partial\mathcal{C}$  soit une union de  $N$  courbes lisses, pouvant avoir des points doubles. De plus :

- (i) Si  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \varrho$ , alors  $N \leq 2$ .
- (ii) Si  $\text{diam}(\mathcal{C}) \geq \varrho$ , et si  $X^1, X^2 \in \partial\mathcal{C}$  sont deux points finaux, alors  $|X^1 - X^2| \geq \frac{\varrho}{2}$ .

► Un point final est nécessairement un point cuspidal.

► Un point double est nécessairement un point de tangence de deux courbes - mais jamais l'intersection de deux courbes avec un angle nul.

**Commentaires 2.5.4** Ce résultat difficile est un raffinement du Théorème 2.5.8 ci-dessus, en ce sens qu'il confirme que chaque composante connexe n'a qu'un nombre fini de points singuliers et donne une estimation de leur nombre. Le théorème de R. MONNEAU est plus précis, en ce sens qu'il fournit une classification géométrique des composantes connexes de la zone de contact.

En particulier, nous avons une classification géométrique complète des petites composantes connexes :

- une courbe à deux bouts : deux points cuspidaux.
- une courbe à deux bouts en le même point : un point cuspidal.
- une courbe fermée ayant un point double et sans point final.



FIG. 2.3 – Exemples de cusps au point  $X^\circ$

## 2.6 Réponses à la conjecture de Schaeffer en dimension 2

La grande variété d'informations disponibles pour le problème (2.2), a permis de corroborer la Conjecture de Schaeffer en dimension 2. Nous en présentons une preuve proposée par R. MONNEAU et discutons de son extension.

### 2.6.1 Une première réponse de R. Monneau

Un problème d'obstacle très proche de celui qui nous préoccupe est celui, étudié par R. MONNEAU, d'une membrane plongée dans le champ gravitationnel, fixée à son bord sur un support rigide que l'on avance vers un obstacle plan. C'est pour ce problème modèle qu'il a été obtenu des résultats très fins, dans la mouvance des idées introduites par L. CAFFARELLI et G. WEISS. En particulier dans [99] est donnée une réponse positive à la conjecture de Schaeffer dans ce cas particulier.

**Théorème 2.6.1** (RÉGULARITÉ GÉNÉRIQUE DE LA FRONTIÈRE LIBRE) *Considérons (2.2) pour un champ de forces constant  $F \equiv 1$  avec  $\Omega$  un domaine bornée du plan à bord analytique, un obstacle plan  $\psi \equiv 0$ , et imposons un déplacement uniforme constant  $t > 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors pour presque tout  $t > 0$  le bord de la frontière libre  $\partial\mathcal{I}_t := \partial\{U_t = 0\}$  est analytique.*

### 2.6.2 Variante de la réponse de R. Monneau

Forts des observations précédentes, nous pouvons donner une variante du théorème 2.6.1, où nous nous fixons le déplacement au bord  $U|_{\partial\Omega} = 1$ , un obstacle  $\psi$  général, et choisissons une force vérifiant l'hypothèse de non dégénérescence. Nous obtenons une version « radiale » de la Conjecture de Schaeffer en dimension 2.

### 2.6.2.1 Énoncé du Théorème et le principe de sa Démonstration

**Théorème 2.6.2** *Considérons (2.2) avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$  (resp. analytique), un obstacle plat  $\psi \equiv 0 < G = 1$ . Choisissons une force  $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$  (resp. analytique) vérifiant l'hypothèse de non dégénérescence  $F \geq \delta_0 > 0$  sur  $\Omega$ . Alors pour presque tout  $t > 0$ , la frontière libre  $\partial\mathcal{I}(tF)$  est  $C^\infty$  (resp. analytique).*

**Commentaires 2.6.1** Nous pourrions énoncer un résultat similaire en affaiblissant les données, par exemple  $\partial\Omega$  de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $\psi \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ ,  $G \in C^{1,1}(\partial\Omega)$ , et  $F_\lambda \in C^1(\Omega)$  vérifiant une hypothèse de non dégénérescence avec une condition de monotonie.

Nous donnons à présent le principe de la preuve Théorème 2.6.2 qui s'adapte *mutatis mutandis* de celle du Théorème 2.6.1. Précisons que le fait que la frontière libre soit  $C^\infty$  ou analytique dépend seulement de la régularité des données comme nous le savons d'après le Théorème 2.5.1.

**Principe de la preuve :** Par le changement de variables

$$U(t) := \frac{U_\lambda}{\lambda},$$

nous ramenons l'énoncé du Théorème 2.6.2 à celui du théorème 2.6.1 mais pour une force  $F$  non constante, avec  $t := \frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ .

Pour alléger les notations nous posons  $\psi \equiv 0$ . Alors  $U_\lambda$  et  $U(t)$  vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U_\lambda = F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}_\lambda, \\ U_\lambda = \lambda & \text{sur } \partial\Omega, \\ U_\lambda = 0 & \text{sur } \mathcal{I}_\lambda, \\ U_\lambda \geq 0 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta U(t) = tF & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(tF), \\ U(t) = 1 & \text{sur } \partial\Omega, \\ U(t) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}(tF), \\ U(t) \geq 0 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Définissons pour tout  $\lambda > 0$

$\mathfrak{S}_\lambda :=$  ensemble des points singuliers de l'ensemble de coïncidence de  $U_\lambda$

$$\mathfrak{S} := \coprod_{\lambda > 0} \mathfrak{S}_\lambda$$

et

$$\mathfrak{E}_\lambda := \{X \in \mathfrak{S}_\lambda / \dim \ker Q_X = 0\}, \quad \mathfrak{E} := \{X \in \mathfrak{S} / \dim \ker Q_X = 0\}$$

► Structure de l'ensemble de l'ensemble singulier  $\mathfrak{S}$  :

**Assertion 0 :** Sous les hypothèses du Théorème 2.6.2, l'ensemble  $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{E}$  est contenu dans une  $C^1$ -courbe de mesure de Lebesgue linéique finie et

$$\mathcal{H}^1(\mathfrak{E}) = 0$$

► Introduisons la fonction  $h$  définie par  $h(X) := \sup\{\lambda \in [0, +\infty[ / U_\lambda = 0\}$ .



---

**Assertion 1 :** La fonction  $h$  est Lipschitz-continue sur  $\overline{\Omega}$ .

► Grâce à la fonction  $h$  on dispose d'une nouvelle présentation de la zone de contact :

**Assertion 2 :**

$$\{X \in \Omega / h(X) \leq \lambda\} = \{X \in \Omega / U_\lambda(X) = 0\}$$

&

$$\{X \in \Omega / h(X) = \lambda\} = \partial\{X \in \Omega / U_\lambda(X) = 0\}$$

► La fonction  $h$  a un gradient nul en les points singuliers de la frontière libre, précisément :

**Assertion 3 :**

$$\limsup_{\substack{X, X' \in \mathfrak{S} \\ |X - X'| \rightarrow 0}} \frac{|h(X') - h(X)|}{|X - X'|} = 0$$

► Rappelons la **formule de co-aire** [61] :

**Théorème 2.6.3** (H. FEDERER) *Soit  $A \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble tel que  $A \setminus B$  soit inclus dans une  $C^1$ - $k$ -sous-variété de  $k$ -mesure de Lebesgue finie et  $\mathcal{H}^k(B) = 0$ , avec  $k < m$ . Soit une fonction  $f \in C^{0,1}(A, \mathbb{R})$ . Alors le gradient  $\nabla f$  est défini  $\mathcal{H}^k$ -presque partout sur  $A$  et :*

$$\int_A |\nabla f| d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{k-1}(f^{-1}(y)) dy.$$

Enfin grâce à la **formule de co-aire** nous montrons que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}^0\left((h)_{|\mathfrak{S}}^{-1}(\lambda)\right) d\lambda = 0$$

avec

$$h_{|\mathfrak{S}}^{-1}(\lambda) = \mathfrak{S}_\lambda.$$

Nous allons à présent étayer la démonstration du Théorème 2.6.2.

### 2.6.2.2 Preuve de l'Assertion 0

Nous donnons ici quelques renseignements sur la structure de l'ensemble des points singuliers,  $\mathfrak{S}$ , qui seront utiles pour la preuve. Rappelons que l'on a noté :

$$\mathfrak{S}_\lambda := \{X \in \Omega / X \text{ est un point singulier de } \partial\mathcal{I}_\lambda\}, \text{ et } \mathfrak{S} := \bigcup_{\lambda > 0} \mathfrak{S}_\lambda.$$

**Proposition 2.6.1** *L'ensemble  $\mathfrak{S}_\lambda$  est fermé.*

*L'ensemble  $\mathfrak{R}_\lambda := \{X \in \Omega / X \text{ est un point régulier de } \partial\mathcal{I}_\lambda\}$  est un ouvert de  $\partial\mathcal{I}_\lambda$ ,  $\mathfrak{S}_\lambda$  est un fermé  $\partial\mathcal{I}_\lambda$ . L'ensemble  $\mathfrak{S}$  est compact.*

**Preuve :** ♦ La proposition découle des caractérisations des ensembles  $\mathfrak{S}_\lambda$  et  $\mathfrak{R}_\lambda$  via la formule de monotonie du théorème 2.5.3, avec

$$\mathfrak{R}_\lambda := \{X^0 \in \partial\mathcal{I}_\lambda / \Phi_{U_\lambda, X^0}(0^+) = \alpha\}, \text{ et } \mathfrak{S}_\lambda := \{X^0 \in \partial\mathcal{I}_\lambda / \Phi_{U_\lambda, X^0}(0^+) = 2\alpha\}.$$

Donnons-nous une suite  $(X_k^0)_k$  de  $\mathfrak{S}_\lambda$  convergeant vers  $X^0$ , supposons par l'absurde que  $X^0 \notin \mathfrak{S}_\lambda$ . Alors comme  $\partial\mathcal{I}_\lambda = \mathfrak{S}_\lambda \amalg \mathfrak{R}_\lambda$ , d'où  $\Phi_{U_\lambda, X^0}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \alpha$ . Donnons nous un  $r_0 > 0$  tel que  $\Phi_{U_\lambda, X^0}(r_0) \leq \frac{3}{2}\alpha$ , mais comme  $\Phi_{U_\lambda, X_k^0}(r) \geq \Phi_{U_\lambda, X_k^0}(0) = 2\alpha$  par passage à la limite vient la contradiction. Donc  $\mathfrak{S}_\lambda$  est fermé, et puisque  $\mathcal{I}_\lambda$  est compact  $\mathfrak{R}_\lambda$  est ouvert. Remarquons pour finir que l'ensemble  $\mathfrak{S}$  est fermé dans  $\bar{\Omega}$ . ♦

**Lemme 2.6.1** *L'application  $Q : \mathfrak{S} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ ,  $X \longmapsto Q_X$  est continue. De plus il existe un module de continuité  $\sigma(r)$  tel que*

$$|Q_{X^1} - Q_{X^0}| \leq \sigma(|X^1 - X^0|) \text{ pour tout points } X^1, X^0 \in \mathfrak{S}.$$

*Ici  $Q_X$  est une matrice  $2 \times 2$  positive de trace  $F(X)$ , qui caractérise la limite (unique) de blow-up du point singulier  $X$ .*

**Preuve du Lemme 2.6.1** ♦ L'existence du module de continuité provient de l'uniforme continuité sur les compacts. Supposons par l'absurde qu'il n'y ait pas continuité. Alors il existe  $\delta > 0$  et deux suites de points singuliers  $(X^k)_k$  et  $(Y^k)_k \in \mathfrak{S}$  telles que :

$$|Q(Y^k) - Q(X^k)| \geq \delta > 0, \text{ quand } |Y^k - X^k| \rightarrow 0.$$

Nous pouvons supposer que  $h(Y^k) \geq h(X^k)$  et posons :

$$\begin{aligned} V_1^k(X) &:= \frac{U_{h(X^k)}(X^k + |Y^k - X^k|X)}{|Y^k - X^k|^2} \\ &\leq V_2^k(X) := \frac{U_{h(Y^k)}(X^k + |Y^k - X^k|X)}{|Y^k - X^k|^2} \end{aligned}$$

Après extraction d'une sous suite (indiquée par  $k'$ ), nous obtenons :

$$V_1^{k'}(X) \longrightarrow V_1^0(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_1 \cdot X \geq 0 \text{ avec } \text{tr} Q_1 = F(X)$$

et

$$V_2^{k'} \longrightarrow V_2^0.$$

Alors pour  $|X^0| = 1$  quelconque :

$$V_2^{k'}(X^0 + X) \longrightarrow V_2^0(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_2 \cdot X \geq 0 \text{ avec } \text{tr} Q_2 = F(X).$$

Puis  $V_1^0 \leq V_2^0$  sur  $\mathbb{R}^2$  implique que  $Q_1 = Q_2$  donc  $V_1^0 = V_2^0$ .

Enfin grâce à la formule de monotonie du théorème 2.5.9, découle

$$\int_{\partial\mathbb{B}} (V_1^k(X) - V_1^0(X))^2 = \int_{\partial\mathbb{B}} ({}^t X \cdot Q_{X^k} \cdot X - V_1^0(X))^2$$

$$\int_{\partial \mathbb{B}} (V_2^k(X) - V_2^0(X))^2 = \int_{\partial \mathbb{B}} ({}^t X \cdot Q_{Y^k} \cdot X - V_2^0(X))^2$$

et du fait que  $V_i^{k'} \longrightarrow V_1^0 = V_2^0$ , pour  $i = 1, 2$ , nous concluons

$$|Q(Y^k) - Q(X^k)| \longrightarrow 0,$$

ce qui est absurde.  $\blacklozenge$

Rappelons le théorème de l'extension de Whitney [61] :

**Théorème 2.6.4** *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d$  et deux fonctions*

$$F : K \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad T(F) : K \longrightarrow \mathbb{R}^{p \times d}$$

*telles que*

$$\limsup_{|a-b| \rightarrow 0; a, b \in K} \frac{|F(b) - F(a) - T(F(a)) \cdot (b - a)|}{|(b - a)|} = 0$$

*Alors il existe une application de classe  $C^1$ ,  $\bar{F} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$ , vérifiant :*

$$\bar{F}|_K = F \text{ et } (\nabla \bar{F})|_K = T(F)$$

**Démonstration de l'Assertion 0 :**  $\blacklozenge$  Appliquons le Théorème 2.6.4, au voisinage d'un point singulier  $X^o$  tel que :  $\dim \ker Q_{X^o} = k$ , l'ensemble singulier  $\mathfrak{S}$  est inclus dans une  $C^1$ - $k$ -sous-variété de  $\Omega$ . En particulier par un argument de recouvrement dénombrable on obtient  $\mathcal{H}^1(\mathfrak{E}) = 0$ . Puis par un même type d'argument, on conclut que l'ensemble fermé  $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{E}$  est inclus dans une  $C^1$ -courbe de longueur finie.  $\blacklozenge$

### 2.6.2.3 Preuve de l'Assertion 3 :

Supposons par l'absurde que cette assertion soit fausse. Alors il existe  $\delta > 0$  et deux suites de points singuliers  $(X^k)_k$  et  $(Y^k)_k \in \mathfrak{S}$  telles que :

$$\frac{|h(Y^k) - h(X^k)|}{|Y^k - X^k|} \geq \delta > 0, \text{ quand } |Y^k - X^k| \rightarrow 0.$$

Par les égalités de l'assertion 2, on a en particulier :

$$\{U_{h(X^k)} = 0\} \ni Y^k$$

or  $h$  est Lipschitz, ce qui donne :

$$\{U_{h(X^k)} = 0\} \supset \mathbb{B}(Y^k, r_k), \text{ où } r_k := \delta \frac{|Y^k - X^k|}{\text{Lip}(h)}.$$

En introduisant le blow-up :  $u^k(X) := \frac{U_{h(X^k)}(X^k + r_k X)}{r_k^2}$ , en particulier :

$$u^k = 0 \text{ sur la boule } \mathbb{B}(X^k, 1), \text{ avec } |Z^k| = \frac{\text{Lip}(h)}{\delta}$$

Ceci achève la preuve de l'assertion 3 par contradiction avec Théorème de « l'extrême finesse » 2.5.7 qui conclut que 0 est un point régulier alors qu'il est singulier pour  $u^k$  !

#### 2.6.2.4 Preuve de l'Assertion 2 :

Tout d'abord nous avons besoin des trois Lemmes suivants :

**Lemme 2.6.2** (LEMME DE NON-DÉGÉNÉRESCENCE) *Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.6.2, considérons  $U_\lambda$  solution du problème (2.2),  $X^o \in \overline{\{U_\lambda > 0\}}$ . Si  $\mathbb{B}(X^o, r) \subset \Omega$ , alors :*

$$\sup_{X \in \mathbb{B}(X^o, r)} \left( U_\lambda(X) - U_\lambda(X^o) \right) \geq \frac{r^2}{4}.$$

**Preuve :** ♦ Il suffit d'appliquer le principe du maximum à la fonction  $w(X) := U_\lambda(X) - U_\lambda(X^o) - \frac{|X|^2}{4}$  sur  $\mathbb{B}(X^o, r) \cap (\Omega \setminus \mathcal{I}_\lambda)$  ♦

**Lemme 2.6.3** *Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.6.2, pour tout point  $X^o \in \Omega$ ,  $X^o \in \partial\{U_{h(X^o)} = 0\}$ .*

**Preuve :** ♦ Ce lemme est une conséquence directe du fait que pour  $\lambda_1 = h(X^o)$  et pour tout  $s > 0$  :

$$U_{\lambda_1+s} > 0,$$

en outre par le lemme de non-dégénérescence :

$$\sup_{X \in \mathbb{B}(X^o, r)} \left( U_{\lambda_1+s}(X) - U_{\lambda_1+s}(X^o) \right) \geq \frac{r^2}{4}.$$

Puis par la continuité de l'application  $(X, \lambda) \mapsto U_\lambda(X)$  en  $s = 0$  :

$$\sup_{X \in \mathbb{B}(X^o, r)} U_{\lambda_1} \geq \frac{r^2}{4}.$$

♦

Rappelons que nous avons déjà observé (par le principe du maximum) le résultat suivant :

**Lemme 2.6.4** *Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.6.2, soient  $U_\lambda$  et  $U_{\lambda'}$  solutions de (2.2) avec  $U_\lambda = \lambda$  et  $U_{\lambda'} = \lambda'$  sur  $\partial\Omega$ , alors il y a croissance de l'ensemble de coïncidence au sens suivant :*

$$\{U_\lambda = 0\} \subseteq \{U_{\lambda'} = 0\} \text{ si } \lambda' \leq \lambda \quad (2.29)$$

Passons à la preuve des deux égalités de l'assertion 2. Par (2.29) et par la continuité de l'application  $(X, \lambda) \mapsto U_\lambda(X)$  il vient

$$\{X \in \Omega / h(X) \geq \lambda\} = \{X \in \Omega / U_\lambda(X) = 0\}.$$

Pour prouver la seconde égalité, il suffit d'après le Lemme 2.6.3 de montrer que :

$$\{X \in \Omega / h(X) = \lambda\} \supset \partial\{X \in \Omega / U_\lambda(X) = 0\}.$$

---

Ce qui est une conséquence du fait que

$$\{X \in \Omega / h(X) \geq \lambda\} \supset \{X \in \Omega / U_\lambda(X) = 0\},$$

et du fait que  $h$  soit lipschitzienne (Assertion 1) ce qui exclut le cas  $h > \lambda$ . Ce qui achève la preuve de l'assertion 2.

### 2.6.2.5 Preuve de l'Assertion 1 :

Commençons par supposer acquis le résultat suivant que nous prouverons plus tard :

**Proposition 2.6.2** *L'application  $h$  est continue.*

Pour montrer que  $h$  est lipschitzienne, nous avons besoin d'introduire une famille de fonctions pour  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , définie par :

$$v^\varepsilon(X) := \sup_{Y \in \mathbb{B}(X, \varepsilon\delta)} U_{\lambda-\delta}(Y)$$

sur-solution (comme nous le prouverons au Lemme 2.6.5) du problème d'obstacle (2.6.2) sur

$$\Omega_{-\varepsilon\delta} := \{X \in \Omega / \text{dist}(X, \partial\Omega) > \delta\varepsilon\}.$$

Pour  $\delta > 0$  fixé, en faisant varier continument le paramètre  $\varepsilon > 0$ , on prouvera que les sous-solutions restent au-dessous de  $U_\lambda$  et ce jusqu'à une certaine valeur critique  $\varepsilon_c > 0$ , i.e :

$$v^\varepsilon \leq u_\lambda \text{ sur } \Omega_{-\varepsilon\delta} \text{ pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c := \frac{1}{\|\nabla U_\lambda\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \Omega_{-\varepsilon\delta})}} \quad (2.30)$$

Pour  $\varepsilon = \varepsilon_c$ , on a

$$\text{dist}(\{U_\lambda = 0\}, \{U_{\lambda-\delta} > 0\}) \geq \delta\varepsilon_c.$$

En particulier si  $Y \in \partial\{u_\lambda = 0\}$  et  $Y \in \partial\{U_{\lambda-\delta} = 0\}$ , alors

$$0 \leq \frac{h(Y) - h(X)}{|X - Y|} \leq \frac{1}{\varepsilon_c},$$

Ainsi en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient, en vertu de la continuité de l'application  $(X, \lambda) \mapsto \nabla U_\lambda(X)$

$$0 \leq \limsup_{\substack{h(Y) > h(X) \\ h(Y), h(X) \rightarrow \lambda}} \frac{h(Y) - h(X)}{|X - Y|} \leq \|\nabla U_\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

En particulier on conclut

$$\text{Lip}(h) \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \|\nabla U_\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \|\nabla U_\infty\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < \infty,$$

où la fonction  $U_\infty$  solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta U_\infty = F & \text{sur } \Omega \\ U_\infty = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.31)$$

En conclusion, nous avons bien  $h \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ , si  $h$  est continue.

Reste à démontrer les résultats intermédiaires concernant  $v^\varepsilon$ . Par définition de  $v^\varepsilon$ , si  $X^1 \in \partial\Omega_{-\varepsilon\delta}$ , il existe  $X^2 \in \partial\Omega$  tel que

$$|X^1 - X^2| = \varepsilon\delta \text{ et } [X^1, X^2] \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_{-\varepsilon\delta}$$

En outre

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(X^1) &= \sup_{Y \in \mathbb{B}(X^1, \varepsilon\delta)} \leq \lambda - \delta = U_\lambda(X^2) - \delta \\ &= U_\lambda(X^1) - \delta + (U_\lambda(X^2) - u_\lambda(X^1)) \leq U_\lambda(X^1) - \delta(1 - \varepsilon\|\nabla U_\lambda\|_{L^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{-\varepsilon\delta})}) \end{aligned}$$

**Lemme 2.6.5** *Ici  $v^\varepsilon$  est une sur-solution du problème d'obstacle :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v^\varepsilon \geq F & \text{sur } \{v^\varepsilon > 0\} \cap \Omega_{-\varepsilon\delta} \\ v^\varepsilon \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ \text{si } v^\varepsilon(X^o) = 0, & \text{alors } v^\varepsilon(X^o + X) \leq b.X^2 \end{array} \right. \quad \text{avec } b := \frac{1}{2}\|D^2u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.32)$$

**Preuve du Lemme 2.6.5 :** ♦ C'est qu'une conséquence directe du Théorème suivant :

**Théorème 2.6.5** (UNE VARIANTE DE L'INÉGALITÉ DE T. KATO [77]) *Soient deux fonctions Lipschitziennes  $w_i$ , pour  $i = 1, 2$ , satisfaisant  $w_i \geq 0$  et  $\Delta w_i \geq 0$  sur  $\omega$  un ouvert, et avec*

$$\Delta w_i \geq f \text{ sur } \{w_i > 0\} \cap \omega, \text{ avec } f \in L^1(\Omega). \quad (2.33)$$

Alors  $w := \sup(w_1, w_2)$  satisfait

$$\Delta w \geq f \text{ sur } \{w > 0\} \cap \omega.$$

♦

Considérons maintenant l'ensemble ouvert sur lequel  $v^\varepsilon$  est plus grand que  $U_\lambda$  :

$$\varpi := \{v^\varepsilon > U_\lambda\} \cap \Omega_{-\varepsilon\delta}$$

nous voulons montrer que  $\varpi = \emptyset$ , tant que  $\varepsilon < \varepsilon_c$ . Supposons, par l'absurde, le contraire. Alors grâce au Lemme (2.6.5) ci-dessus et par le principe du maximum, on obtient :

$$\max_{\varpi} (v^\varepsilon - U_\lambda) > 0$$

inégalité que l'on peut étendre à  $\partial\varpi \cup (\mathcal{I}_\lambda \cap \varpi)$ , or  $\partial\varpi \subset (\partial\Omega_{-\varepsilon\delta}) \cup \{v^\varepsilon = U_\lambda\}$ . Alors grâce à (2.30) on a

$$v^\varepsilon - U_\lambda \leq 0 \text{ sur } \partial\varpi \text{ tant que } \varepsilon < \varepsilon_c,$$

ce que nous pouvons résumer sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v^\varepsilon < U_\lambda \text{ sur } \partial\Omega_{-\varepsilon\delta} \\ \max_{X \in \Omega_{-\varepsilon\delta}} [(v^\varepsilon - U_\lambda)(X)] \leq \max_{\mathcal{I}_\lambda} v^\varepsilon \end{array} \right\} \text{ tant que } \varepsilon < \varepsilon_c. \quad (2.34)$$

A présent nous allons appliquer une « méthode de continuité » (adaptée par R. MONNEAU de la technique de « sliding method » de H. BERESTYCKI), en trois étapes :

---

**Étape 1 : Initialisation** Par la continuité de  $h$  (Assertion 3) et par les égalités de l'Assertion 2, il existe  $\varepsilon_1$  suffisamment petit (et en particulier plus petit que  $\varepsilon_c$ ) tel que

$$\text{dist}(\mathcal{I}_\lambda, \{u_{\lambda-\delta} > -1\}) \geq \delta\varepsilon_1$$

En particulier ceci donne

$$v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{I}_\lambda \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_1$$

Puis par (2.34), on a

$$v^\varepsilon \leq U_\lambda \text{ sur } \Omega_{-\varepsilon\delta} \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_1$$

**Étape 2 : Continuation** Soit  $\epsilon^* := \sup\{\epsilon' \in [0, \varepsilon_c] / v^{\epsilon'} \leq U_\lambda \text{ sur } \Omega_{-\epsilon'\delta} \text{ pour tout } \varepsilon \leq \epsilon'\}$ , en particulier on a

$$v^{\epsilon^*} \leq u_\lambda \text{ sur } \Omega_{-\epsilon^*\delta}.$$

Si  $\epsilon^* < \varepsilon_c$ , alors par le Lemme 2.6.5 et par le principe du maximum, on déduit

$$v^{\epsilon^*} < U_\lambda \text{ sur } \{v^{\epsilon^*} > 0\} \cap \Omega_{-\epsilon^*\delta}.$$

Remarquons que d'un autre côté comme on a

$$\{v^{\epsilon^*} = 0\} \supset \mathcal{I}_\lambda.$$

Nous allons prouver que

$$\partial\mathcal{I}_\lambda \cap \partial\{v^{\epsilon^*} > 0\} \neq \emptyset. \quad (2.35)$$

Supposons que (2.35) soit fausse, il vient

$$\text{dist}(\partial\mathcal{I}_\lambda, \partial\{v^{\epsilon^*} > 0\}) = \eta > 0$$

ce qui implique

$$v^{\epsilon^*+s}(X) = \sup_{Y \in \mathbb{B}(X, \delta(s+\epsilon^*))} U_\lambda - \delta(Y) = \sup_{Y \in \mathbb{B}(X, \delta(s+\epsilon^*))} \sup_{Y' \in \mathbb{B}(Y, \delta\epsilon^*)} U_\lambda - \delta(Y') = \sup_{Y \in \mathbb{B}(X, \delta s)} v^{\epsilon^*}(Y)$$

Alors il vient

$$v^{\epsilon^*+s} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{I}_\lambda \text{ si } s < \frac{\eta}{\delta} \text{ si } \epsilon^* + s < \varepsilon_c,$$

ce qui, grâce à (2.34), donne une contradiction avec la définition de  $\epsilon^*$ . Donc (2.35) est vraie, ce qui permet d'affirmer qu'il existe  $X^3$

$$X^3 \in \partial\mathcal{I}_\lambda \cap \partial\{v^{\epsilon^*} > 0\}.$$

De plus il existe  $X^4 \in \partial\mathcal{I}_{\lambda-\delta}$  tel que  $|X^4 - X^3| = \delta\epsilon^*$ , ce qui a pour consequence

$$v^{\epsilon^*} > 0 \text{ sur } \mathbb{B}(X^4, \delta\epsilon^*).$$

Grâce à (2.34), nous résumons les propriétés de  $U_\lambda - v^{\epsilon^*}$  dans  $\mathbb{B}(X^4, \delta\epsilon^*)$  sous la forme :

$$\begin{array}{|l}
\Delta(U_\lambda - v^{\epsilon^*}) \leq 0 \text{ sur } \mathbb{B}(X^4, \delta\epsilon^*) \\
(U_\lambda - v^{\epsilon^*}) > 0 \text{ sur } \mathbb{B}(X^4, \delta\epsilon^*) \\
U_\lambda(X^3) = 0 = v^{\epsilon^*}(X^3) \text{ avec } X^3 \in \partial\mathbb{B}(X^4, \delta\epsilon^*).
\end{array} \tag{2.36}$$

Ainsi en vertu du principe du maximum de Hopf<sup>6</sup>, on déduit

$$\partial_\nu(u_\lambda - v^{\epsilon^*})(X^3) > 0, \text{ où l'on a noté la norme extérieure } \nu := \frac{X^3 - X^4}{|X^3 - X^4|}.$$

Ce qui induit une contradiction manifeste avec le fait que les fonctions positives  $U_\lambda$  et  $v^{\epsilon^*}$  satisfassent :

$$\begin{cases} \nabla U_\lambda(X^3) = 0 & \text{puisque } U_\lambda \in C^{1,1}(\overline{\Omega}). \\ \nabla v^{\epsilon^*}(X^3) = 0 & \text{puisque } v^{\epsilon^*}(X^3 + X) \leq bX^2. \end{cases}$$

**Étape 3 : Conclusion** En conséquence de ce qui vient d'être établi on a  $\epsilon^* = \epsilon_c$ .  
Ce qui achève de prouver que si  $h$  est continue alors elle est lipschitzienne !

**Finalement** Il nous reste donc à prouver la continuité de  $h$  annoncée à la Proposition 2.6.2. Ce que nous allons faire par perturbation. Soit  $\eta > 0$  paramètre de la perturbation :  $u_\lambda^\eta := (1 - \eta)u_\lambda$ . Pour  $\eta$  suffisamment petit, le principe du maximum implique :  $u_\lambda^\eta \leq u_{\lambda'}^\eta$  sur  $\Omega$  si  $\lambda \leq \lambda'$ . Supposons, par l'absurde, que  $h$  ne soit pas continue en  $X^o \in \Omega$ . Alors il existe une suite  $X^k \rightarrow X^o$  telle que  $|h(X^k) - h(X^o)| \geq \delta > 0$ . Si on a  $h(X^k) - h(X^o) \leq -\delta < 0$ , alors soit

$$\begin{aligned} v_2^k(X) &:= (1 - \eta h(X^k)) \frac{u_{h(X^k)}(X^o + |X^k - X^o|X)}{|X^k - X^o|^2} \\ &\leq v_1^k(X) := (1 - \eta h(X^o)) \frac{u_{h(X^o)}(X^o + |X^k - X^o|X)}{|X^k - X^o|^2} \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 2.6.3, on a que  $X^o$  est un point de la frontière libre  $\mathcal{I}_{h(X^o)}$ . Par le Théorème 2.5.6 on établit que la limite de blow-up  $v_1^0$  vérifie avec  $\lambda_1 := h(X^o)$  :

$$\frac{1}{(1 - \eta\lambda_1)} v_1^0 = \begin{cases} \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_1 \cdot X \geq 0 \text{ avec } \text{tr}(Q_1) = 1 \\ \text{ou bien} \\ \frac{1}{2} \left( \max(X \cdot \nu_1, 0) \right)^2 \end{cases}$$

La suite  $(v_2^k)_k$  a également une limite de blow-up, notée  $v_2^0$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Rappelons le Théorème suivant :

---

**Lemme 2.6.6** (LEMME DU POINT DU BORD OU PRINCIPE DU MAXIMUM DE HOPF) *Soit  $D$  un ouvert de classe  $C^2$  du plan. Soit  $w$  satisfaisant*

$$\Delta w \geq 0 \text{ sur } D, \text{ \& } w \leq M \text{ sur } D.$$

*Supposons qu'il existe  $X_M \in \partial D$  tel que  $w(X_M) = M$  et que  $w$  soit continue sur  $D \cup \{X_M\}$ . Alors :  
ou bien la normale extérieure de  $w$  en  $X_M$ , si elle existe, satisfait  $\partial_\nu w(X_M) > 0$ ,  
ou bien  $w \equiv M$  sur  $D$ .*



**Théorème 2.6.6** [29] Supposons (2.25), et désignons par  $U$  une solution du problème (2.2). Soit la suite de blow-down (avec  $\kappa_n \rightarrow +\infty$ )

$$u^{\kappa_n} := \frac{U(\kappa_n X)}{\kappa_n^2}.$$

Alors après extraction d'une sous-suite  $\kappa'_n$  :

$$u^{\kappa'_n} \rightarrow u^\infty, \text{ uniformément sur les compacts de } \mathbb{R}^2$$

avec

$$u^\infty = \begin{cases} \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X \geq 0 \text{ avec } \text{tr}(Q) = F(X) \\ \text{ou bien} \\ \frac{1}{2} \left( \max(X \cdot \nu, 0) \right)^2 \end{cases}$$

Introduisons le blow-down  $v_2^{0,\kappa}$  quand  $\kappa \rightarrow +\infty$  défini par :

$$v_2^{0,\kappa}(X) := \frac{v_2^0(\kappa X)}{\kappa^2} \leq v_1^{0,\kappa}(X) := v_1^0(X).$$

C'est alors que le Théorème 2.6.6 assure que la limite de blow-down  $v_2^{0,\infty}$  satisfait, avec  $\lambda_2 = \lim h(X^k) \leq \lambda_1 - \delta$  :

$$\frac{1}{(1 - \eta\lambda_2)} v_2^{0,\infty}(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_2 \cdot X \geq 0 \text{ avec } \text{tr}(Q_2) = F(X) \\ \text{ou bien} \\ \frac{1}{2} \left( \max(X \cdot \nu_2, 0) \right)^2 \end{cases}$$

Or le fait que l'on ait :

$$(1 - \eta\lambda_2) > (1 - \eta\lambda_1),$$

est absurde avec le fait que l'on ait aussi

$$v_2^{0,\infty} \leq v_1^{0,\infty} := v_1^0, \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

On obtient une contradiction similaire avec  $|h(X^k) - h(X^o)| \geq \delta > 0$ . ♦

## 2.7 Stabilité de la zone de contact au sens de D.G. Schaeffer

Nous présentons ci-dessous le résultat historique de stabilité dû à David G. Schaeffer, de 1975, allant dans le sens de l'étude de la conjecture précitée, affirmant que génériquement  $\partial\mathcal{I}(F)$  est une  $C^\infty$ -2-variété. Sa preuve est basée sur le **Théorème des fonctions implicites de Nash-Moser** rappelé dans l'Annexe A. Initialement D.G. Schaeffer s'est appuyé sur la formulation proposée par F. SERGERAERT dans [123] en 1972. Cependant la version que nous en donnons dans l'annexe est un Théorème issu de l'article [64] de R.S. HAMILTON de 1982.

### 2.7.1 L'approche géométrique par le théorème des fonctions implicites

#### 2.7.1.1 Cadre

Le résultat de David G. Schaeffer concerne la stabilité par perturbation de (2.2) par rapport à  $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , dans le cas particulier d'un obstacle plan  $\psi \equiv 0$  et  $G = \mathbf{1}_{\partial\Omega}$ . Dans ce cas le problème fort s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta U & = & F \quad \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U & = & 1 \quad \text{sur } \partial\Omega. \\ U & \geq & 0 \quad \text{sur } \Omega. \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \\ U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right. \quad (2.37)$$

si nous supposons que  $\mathcal{I}(F)$  est une surface lisse.

**Théorème 2.7.1** *Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \equiv 0$  et  $G = 1$ . Considérons le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}_{0,1}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV d\Omega \end{array} \right. \quad (2.38)$$

*Supposons qu'il existe  $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$  satisfaisant :*

- (i) :  $F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}(F^\circ)$ ;
- (ii) :  $\mathcal{I}(F^\circ)$  est une surface lisse ( $C^\infty$ );

*Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ , la zone de contact  $\mathcal{I}(F)$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .*

**Commentaires 2.7.1** Nous allons résumer la preuve donnée dans [117]. Même s'il n'y a rien de nouveau (modulo la preuve complète de la formule de la Proposition 2.7.3) il nous semble utile de retracer les grandes lignes de cette démonstration assez technique afin que les idées essentielles et les points de différence avec le cas de la plaque (que nous verrons au chapitre suivant) soient plus facilement compréhensibles et indentifiables.

### 2.7.1.2 Stratégie générale de la Preuve selon [117] (section 2. pages 37-38)

D. Schaeffer a d'abord reformulé le problème d'obstacle comme une équation fonctionnelle à laquelle il a appliqué un **théorème des fonctions implicites de Nash-Moser**<sup>7</sup>. Ce Théorème permet de résoudre l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  au voisinage d'une solution particulière

<sup>7</sup>voir Annexe A

$(u^\circ, F^\circ)$  sous une série d'hypothèses portant sur  $\mathbf{T}$  et  $\partial_u \mathbf{T}$ .

Commençons par introduire  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  un voisinage de  $(0, 0)$ , et posons pour simplifier

$$\|(u, F)\|_\lambda = \|u\|_\lambda + \|F\|_\lambda$$

puis pour un entier  $k$  posons

$$\mathcal{O}' : \{(u, F) \in \mathcal{O} / \|(u, F)\|_{\sigma+k} < \epsilon\}.$$

La démonstration du Théorème 2.7.1 utilise le Théorème 2.7.2 pour  $m = 1$ ,  $\sigma = 2 + \alpha$ ,  $k = 2$ .

**Théorème 2.7.2** [117] *Soit  $\mathbf{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :*

– (H1)  $\mathbf{T} : \mathcal{O}' \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbf{T}[0, 0] = 0$  ;

– (H2)  $\|\mathbf{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0(\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

– (H3)  $\|\mathbf{T}[u, F_1] - \mathbf{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

– (H4)  $\exists L_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$$\|\mathbf{T}[u + w, F] - \mathbf{T}[u, F] - L_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2(\|\mathbf{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2) ;$$

– (H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,  $(L_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda)(\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}.$$

*Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tel que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbf{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .*

Finalement une fois l'équation fonctionnelle résolue, il faut s'assurer que la courbe décrite par le couple  $(u, F)$  correspond effectivement à la frontière libre (bordant  $\mathcal{I}^u$  qui représente la région de contact) du problème d'obstacle (2.38) associée à  $F$ . Notons que l'équation  $\mathbf{T}[u, F] = 0$  est résoluble dans un certain espace de Hölder, sa résolution dans l'espace des fonctions  $C^\infty$  résulte du fait que les estimations douces (H1) - (H5) sont vérifiées pour tout  $\kappa \geq \lambda$  (puisque l'espace des fonctions  $C^\infty$  est gradué par les espaces de Hölder  $C^\kappa$ ).

### 2.7.1.3 Idée de la Preuve

Posons  $(U^\circ, \mathcal{I}^\circ)$  la solution de (2.38) (i.e. (2.2) avec  $\psi \equiv 0$ ,  $G = 1$ ),  $F^\circ$  étant donnée telle que  $\mathcal{I}^\circ := \mathcal{I}(F^\circ)$ ,  $\Gamma^\circ := \partial \mathcal{I}(F^\circ)$ .

Définissons l'application :

$$\Upsilon^u : X \in \Gamma^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Upsilon^u(X) := X + u(X)n(X),$$

avec  $n(X) := n^\circ(X)$  la normale unitaire de  $\Gamma^\circ$  extérieure à  $\mathcal{I}^\circ$ . Cette application  $\Upsilon^u$  permet de perturber la frontière libre actuelle  $\Gamma^\circ$  en  $\Gamma^u$  que l'on va chercher à identifier comme la

frontière libre du problème (2.38) associée à un certain champ de forces  $F$  inconnu. Désignons par  $\Gamma^u$  l'image de  $\Gamma^\circ$  via  $\Upsilon^u$ , et  $\mathcal{I}^u$  la région bordée par  $\Gamma^u$ ,  $\Omega^u := \Omega \setminus \mathcal{I}^u$ . Il vient naturellement :

**Lemme 2.7.1** *Si  $\eta > 0$  est suffisamment petit, alors pour  $\|u\|_k \leq \eta$  l'application  $\Upsilon^u$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $\Gamma^\circ$  sur  $\Gamma^u$ .*

Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $\mathcal{O} := \{(u, F) \in C^{2,\alpha}(\Gamma^\circ) \times C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{2+\alpha} \leq \eta, \|F - F^\circ\|_\alpha \leq \eta\}$ .

Nous introduisons la fonctionnelle

$$\mathbf{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{1+\alpha}(\Gamma^\circ)$$

définie pour  $(u, F) \in \mathcal{O}$  par :

$$\mathbf{T}[u, F] := \frac{\partial U^u}{\partial n^\circ} \circ \Upsilon^u \quad (2.39)$$

où  $U^u$  est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta U^u = F & \text{sur } \Omega^u. \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \end{cases} \quad (2.40)$$

Par des estimations de type Schauder, nous avons :

**Lemme 2.7.2** *La fonction  $\mathbf{T}[u, F]$  appartient à  $C^{1+\alpha}(\Gamma^\circ)$ .*

**Preuve :** ♦ Soit  $(u, F) \in \mathcal{O}$ , par composition  $\Upsilon^u \in C^{2,\alpha}(\Gamma^\circ, \Gamma^u)$  si  $u \in C^{2,\alpha}(\Gamma^\circ)$ . Donc le bord de  $\Omega^u$  est au moins de classe  $C^{2,\alpha}$ , puisque  $\Omega^\circ$  est supposé lisse. Alors de [6] se déduit l'estimation suivante :

$$\partial_{n^\circ} U^u \in C^{1,\alpha}(\Gamma^u, \Omega).$$

En effet grâce au Théorème 7.3. page 668 de [6] la solution de (2.40) appartient à  $C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega^u})$  si  $F \in C^{k,\alpha}(\Omega^u)$ . ♦

Supposons à présent que nous soyons capables de trouver, pour  $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , une fonction  $u$  telle que :

$$\mathbf{T}[u, F] = 0, \quad (2.41)$$

alors  $\mathcal{I}^u$  représente la région de contact du problème d'obstacle (2.38), pourvu que l'on ait les conditions

$$F \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}^u, \text{ \& } U^u > 0 \text{ sur } \Omega^u,$$

puisque sous ces conditions :

**Proposition 2.7.1** *Si  $U^u$  solution de (2.40) vérifie  $U^u > 0$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$ ,  $F \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}^u$ , alors la fonction  $\tilde{U}^u$  égale à  $U^u$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$  et identiquement nulle sur  $\mathcal{I}^u$  est égale à la fonction du problème (2.38).*

**Commentaires 2.7.2** L'utilité de l'introduction de la fonctionnelle (2.41) réside dans l'équivalence ci-dessous :

$$\left( \mathsf{T}[u, F] = 0 \right) \Longleftrightarrow \left( \partial_{n^\circ} U^u = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{I}^\circ \right),$$

l'équation  $\mathsf{T}[u, F] = 0$  représente donc la donnée de Neumann sur  $\partial \mathcal{I}^u$  rapportée sur  $\partial \mathcal{I}^\circ$ .

#### 2.7.1.4 Métrique, courbures et différentielles sur la frontière libre

Soit  $\mathbf{g}^u$  la métrique scalaire (riemannienne) sur  $\Gamma^u$ , induite par l'application  $\Upsilon^u : \partial \mathcal{I}^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , i.e la métrique qui, par rapport à un système de coordonnées sur  $\partial \mathcal{I}^\circ$ , d'abscisse curviligne noté  $X$ , a pour expression :

$$\mathbf{g}^u := \sum_{l=1,2} \left[ \partial_X (\Upsilon^u)_l \right]^2 = 1 + (u'(X))^2.$$

**Définition 2.7.1** Nous définissons la fonction  $\hbar^u$  comme le carré de la courbure (normale) donc inverse du carré du rayon de courbure :

$$\hbar^u = 1 + (\mathbf{g}^u)^{-1} \left[ \partial_X u \right]^2 = 1 + \frac{(u'(X))^2}{1 + (u'(X))^2}. \quad (2.42)$$

Désignons  $\mathfrak{B}^u := \angle(n^\circ, n^u)$  l'angle que fait la normale  $n^\circ$  de  $\partial \mathcal{I}^\circ$ , avec  $n^u$  celle de  $\partial \mathcal{I}^u$ . Il est alors facile de voir que

$$\hbar^u = (\cos(\mathfrak{B}^u))^{-2}.$$

Dans un espace euclidien, la normale au graphe de  $u$  fait un angle avec la verticale ayant pour cosinus  $(1 + (u')^2)^{-1/2}$ , (2.42) représente la généralisation de cette formule au cas non-euclidien.

Soit  $U^u$  solution de (2.40). Supposons que l'on ait (2.39). Introduisons le système de coordonnées de  $\Gamma^u$ ,  $(X, t) \mapsto X + [u(X) + t]n^\circ$ . Clairement pour  $t = 0$ , il s'agit du paramétrage de  $\partial \mathcal{I}^u$ . Ainsi par la formule de Taylor, pour  $t \sim 0$ , avec (2.39) et (2.37), il vient :

$$U^u(X, t) \sim \overbrace{U^u(X, 0)}^{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} U^u(X, 0)}^{=0} + \frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 U^u(X, 0) \quad (2.43)$$

Considérons à présent la solution  $U^{u+\varepsilon v}$  du problème aux limites (2.40) ayant pour données  $(u + \varepsilon v, F)$ , et cherchons une solution de la forme  $U^u + \varepsilon V$ ; alors  $V$  résout le problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta V &= 0 & \text{dans } \Omega^{u+\varepsilon v}. \\ U^u + \varepsilon V &= 0 & \text{sur } \mathcal{I}^{u+\varepsilon v}. \\ V &= 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases} \quad (2.44)$$

D'où par (2.43), en posant  $t = \varepsilon v$  il vient que  $U^u_{|\partial \mathcal{I}^{u+\varepsilon v}} = O(\varepsilon^2)$ , donc

$$\mathsf{T}[u + \varepsilon v, F] \sim \partial_{n^\circ} U^u(., 0)_{|\partial \mathcal{I}^{u+\varepsilon v}} \sim \varepsilon v \partial_{n^\circ}^2 U^u(., 0).$$

► Ainsi  $\partial_u \mathsf{T}$  sous la contrainte (2.41) est un opérateur multiplicatif, multipliant par  $\partial_{n^\circ}^2 U(., 0)_{|\partial \mathcal{I}^u}$ .

► En général la dérivée partielle par rapport à  $u$  de l'opérateur  $T$  dans la direction  $v$  (c'est-à-dire  $\partial_u T([u, F]; v) := \frac{d}{d\varepsilon} T[u + \varepsilon v, F]$  en  $\varepsilon = 0$ ) est donnée par :

$$\partial_u T([u, F]; v) = \partial_n W + v \partial_n^2 U^u \text{ sur } \Gamma^\circ,$$

les équations vérifiées par le linéarisé  $W = \frac{d}{d\varepsilon} U^{u+\varepsilon v}$  en  $\varepsilon = 0$ , sont

$$\Delta W = 0 \text{ sur } \Omega^u, \quad W = 0 \text{ et } W + v \partial_n U^u = 0 \text{ sur } \Gamma^\circ.$$

Soulignons que pour définir les dérivées normales  $\partial_{n^\circ}$  et  $\partial_{n^\circ}^2$  il faut étendre les champs dans un voisinage tubulaire pour ne pas avoir de problème pour dériver. Puis nous définissons  $\partial_n U = dU.n = \langle \text{Grad} U, n \rangle_{\mathbf{g}^u}$  comme une fonction numérique. En réitérant<sup>8</sup> nous tirons  $\partial_n^2 U = \partial_n(\partial_n U)$ .

**Proposition 2.7.2**  $\partial_{n^u} U^u = \sqrt{(\hbar^u)} \partial_{n^\circ} U^u \circ \Upsilon^u = (\cos(\beta^u))^{-1} \partial_{n^\circ} U^u \circ \Upsilon^u.$

**Preuve de la Proposition 2.7.2 :** ♦ Puisque  $\beta^u := \angle(n^\circ, n^u)$ , on peut écrire en base locale :

$$n^\circ = \cos \beta^u n^u - \sin \beta^u t^u \quad \& \quad t^\circ = \cos \beta^u n^u + \sin \beta^u t^u$$

d'où

$$\partial_{n^u} n^\circ = \cos \beta^u, \quad \partial_{t^u} n^\circ = -\sin \beta^u \quad \& \quad \partial_{n^u} t^\circ = \cos \beta^u, \quad \partial_{t^u} t^\circ = \sin \beta^u.$$

♦

**Commentaires 2.7.3** *Je veux ici remercier chaleureusement, B. KOLEV du L.A.T.P de Marseille, qui m'a aidé à établir la formule suivante, que D. SCHAEFFER ne prouve pas dans [117] ... ce n'est qu'après quelques mois que j'ai su « d'où vient le fameux cosinus » ... et prouver, à partir de (2.40), la Proposition suivante.*

**Proposition 2.7.3**  $\partial_{n^\circ}^2 U^u = \cos^2(\beta^u) F$ , sur  $\partial \mathcal{I}^u$  pourvu que  $\partial_{n^\circ} U^u = 0$ , sur  $\partial \mathcal{I}^u$ .

**Preuve de (2.7.3) :** ♦ Posons  $U := U^u$  pour simplifier. Plaçons nous dans le voisinage tubulaire de  $\Gamma^u, TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$ , décrit par

$$TUB^\varepsilon(\Gamma^u) := \{(\chi_1, \chi_2) \in \Gamma^u \times [-\varepsilon, +\varepsilon] \mapsto \gamma^u(\chi_1) + \chi_2 n^u\}.$$

Les coordonnées locales dans  $TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$  sont :  $(\chi_1, \chi_2)$ , (voir figure 2.3.2). Soit  $P \in TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$ ,  $P(\chi_1, \chi_2) := \gamma^u(\chi_1) + \chi_2 n^u(\chi_1)$ ,  $\dot{\gamma}^u$  tangent à  $\Gamma^u$ , et  $n^u$  normale unitaire. Ainsi  $\partial_{\chi_1} P(\chi_1, \chi_2) = \dot{\gamma}^u + \chi_2 \dot{n}^u$  et  $\partial_{\chi_2} P(\chi_1, \chi_2) = n^u$ . D'où, on obtient des coordonnées euclidiennes (pour la métrique Riemannienne induite, notée  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{g}}$ ),  $(\vec{x}_1 = \frac{\partial_{\chi_1} P}{\|\partial_{\chi_1} P\|}, \vec{x}_2 = \partial_{\chi_2} P)$ .

8

**Remarque 2.7.1** On utilise la définition même de la connexion riemannienne  $\nabla$  (le fait que  $\mathbf{g}^u$  est parallèle) : si  $A, B$  sont des champs de vecteurs et  $Z$  un vecteur au point  $X$ , on a (en omettant la métrique en indice) :

- (a)  $d\langle A, B \rangle.Z = \langle \nabla_Z A, B \rangle + \langle A, \nabla_Z B \rangle$   $\nabla_n$   
est donc la dérivée covariante dans la direction  $n$  et la formule
- (b)  $\partial_n^2 U = \partial_n(\partial_n U) = \partial_n(\langle \text{Grad} U, n \rangle) = \langle \nabla_n U, n \rangle + \langle \text{Grad} U, \nabla_n \rangle$   
utilise la propriété (a) de la connexion riemannienne.

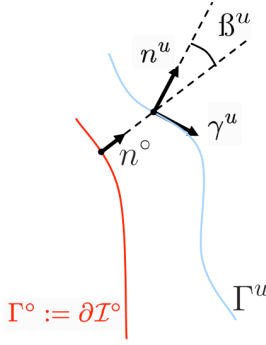


FIG. 2.4 – D'où vient le fameux cosinus ?

**Assertion 1 :**  $(U = 0 \ \& \ \partial_{n^\circ} U = 0, \text{ sur } \Gamma^\circ) \iff (U = 0 \ \& \ dU = 0, \text{ sur } \Gamma^u)$

► Clairement pour  $\chi_2 = 0$ , il s'agit du paramétrage de  $\Gamma^u$ . Or sur  $\Gamma^u$   $U = 0$ , ce qui est équivalent à  $U(\gamma^u(\chi_1), 0) = 0, \forall \chi_1$ , donc  $\partial_{\chi_1} U = \partial_{\chi_2} U = 0$ , sur  $\Gamma^u$ .

**Assertion 2 :** La dérivée seconde de  $U$  tangentielle est nulle, sur  $\Gamma^u$  i.e.  $\partial_{\chi_2}^2 U = 0$ ,  $\Gamma^u$ . Pour les mêmes raisons,  $\partial_{\chi_1 \chi_2}^2 U = 0$ ,  $\Gamma^u$ .

► Puisque  $\partial_{\chi_1} U(\gamma^u(\chi_1), 0) = 0$ ,  $\partial_{\chi_2} U(\gamma^u(\chi_1), 0) = 0 \ \forall \chi_1$ , alors ces fonctions indetiquement nulles sont de dérivée nulle par rapport  $\chi_2$ .

**Assertion 3 :** Le Laplacien de  $U$ , devient dans ce système de coordonnées  $\Delta U = \partial_{n^u}^2 U = F$ , sur  $\Gamma^u$ .

► Par définition,  $\Delta_{\mathbf{g}} U = \text{Div}(\text{Grad} U) = \text{Tr}(\nabla \text{Grad} U)$ , et dans la base orthonormale  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,

$$\Delta_{\mathbf{g}} U = \langle \vec{x}_1 | \nabla_{\vec{x}_1} \text{Grad} U \rangle_{\mathbf{g}} + \langle \vec{x}_2 | \nabla_{\vec{x}_2} \text{Grad} U \rangle_{\mathbf{g}} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}^u\|_{\mathbf{g}}^2} \partial_{\chi_1}^2 U + \partial_{\chi_2}^2 U = \frac{1}{\|\dot{\gamma}^u\|_{\mathbf{g}}^2} \partial_{\chi_1}^2 U.$$

Or sur  $\Omega^u$ ,  $\Delta U = F$ , d'où le résultat.

**Assertion 4 :** Il reste à voir, pour conclure, que :  $\partial_{n^\circ}^2 U = \cos^2(\beta^u) \partial_{n^u}^2 U$ .

► Nous avons,  $\partial_{n^\circ}^2 U = \partial_{n^\circ} (\partial_{n^\circ} U) = \partial_{n^\circ} (\langle \text{Grad} U | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}}) \stackrel{(\spadesuit)}{=} \langle \nabla_{n^\circ} \text{Grad} U | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}} + \overbrace{\langle \text{Grad} U | \nabla_{n^\circ} \rangle_{\mathbf{g}}}^{(\clubsuit)}$   
La formule de Levi-Civita justifie l'égalité  $(\spadesuit)$ ; puis grâce à l'Assertion 1, le terme  $(\clubsuit)$  est nul sur  $\Gamma^u$ .

Ecrivons :  $n^\circ = \cos(\beta^u) \partial_{\chi_2} + \frac{1}{\|\partial_{\chi_1}\|_{\mathbf{g}}} \sin(\beta^u) \partial_{\chi_1}$ , et  $\text{Grad} U = \frac{1}{\|\partial_{\chi_1}\|_{\mathbf{g}}} (\partial_{\chi_1} U) \partial_{\chi_1} + (\partial_{\chi_2} U) \partial_{\chi_2}$

Alors  $\nabla_{n^\circ} \text{Grad} U = \cos(\beta^u) \nabla_{\chi_2} \text{Grad} U + \frac{1}{\|\partial_{\chi_1}\|_{\mathbf{g}}} \sin(\beta^u) \nabla_{\chi_1} \text{Grad} U$ .

En développant  $\langle \nabla_{n^\circ} \text{Grad} U | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}}$  sur  $\Gamma^u$ , on obtient :  $\partial_{n^\circ}^2 U = \cos^2(\beta^u) \partial_{n^u}^2 U$ , car sur  $\Gamma^u$ ,

le termes  $\partial_{\chi_2}^2 U$  et  $\partial_{\chi_2 \chi_1}^2 U$  sont nuls, et que l'angle entre la normale à  $\Gamma^\circ$  et l'axe des  $\chi_2$  est  $\cos(\beta^u)$ . On conclut alors  $\partial_{n^\circ}^2 U = \cos^2(\beta^u) F$ , sur  $\partial \mathcal{I}^u$ . ♦  
En conclusion :

**Proposition 2.7.4** *L'opérateur  $\partial_u \mathbf{T}[u, F]$  n'est autre que la multiplication par*

$$\mathbf{L}_{u,F} := (\hbar^u)^{-1} F \circ \Upsilon^u$$

*si  $\mathbf{T}[u, F] = 0$ , avec  $\mathbf{L}_{u,F}$  linéaire continue i.e. dans  $\mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\varsigma-2}(\Gamma^u))$ .*

### 2.7.1.5 Les Conditions de Nash-Moser via le Théorème 2.7.2

Nous pouvons résoudre l'équation fonctionnelle  $\mathbf{T}[u, F] = 0$ , par le Théorème 2.7.2 (dédit du théorème des fonctions implicites de Nash-Moser), dont nous allons discuter la pertinence de l'application, en énonçant et commentant la série des hypothèses requises sur  $\mathbf{T}$ .

Posons  $0 < \alpha < 1$ ,  $\varsigma = 2 + \alpha$  et  $\iota \geq \varsigma$ . Introduisons le espace

$$\mathcal{O}'_\alpha := \{(u, F) \in C^{4+\alpha}(\Gamma^\circ) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) / \|u\|_{k+\varsigma} \leq \epsilon, \|F\|_{k+\varsigma} \leq \epsilon\}.$$

Alors pour tout  $(u, F), (u + w, F), (u, F_1), (u, F_2) \in \mathcal{O}'_\alpha$  nous supposons :

- (H1)  $\mathbf{T} : \mathcal{O}'_\alpha \longrightarrow C^{1+\alpha}(\Gamma^\circ)$ , est un opérateur non linéaire d'ordre 1 tel que  $\mathbf{T}[0, 0] = 0$  ;
- (H2)  $\|\mathbf{T}[u, F]\|_\iota \leq c_0(\|(u, F)\|_{\iota+1} + 1)$  ;
- (H3)  $\|\mathbf{T}[u, F_1] - \mathbf{T}[u, F_2]\|_{\varsigma-1} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\varsigma$  ;
- (H4)  $\exists \mathbf{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\varsigma(\Gamma^u), C^{\varsigma-m}(\Gamma^u))$  tel que
$$\|\mathbf{T}[u + w, F] - \mathbf{T}[u, F] - \mathbf{L}_{u,F}(w)\|_{\varsigma-1} \leq c_2(\|\mathbf{T}[u, F]\|_\varsigma \|w\|_\varsigma + \|w\|_\varsigma^2) ;$$
- (H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\varsigma+1}(\Gamma^u), C^\varsigma(\Gamma^u))$  tel que  $(\mathbf{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) = (w)$  et
$$\|\ell_{u,F}(w)\|_\iota \leq c_3(\iota)(\|w\|_{\iota+1} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\iota+1}) ;$$

**Commentaires 2.7.4**  $(\|\cdot\|_\iota)_\iota$  représente une échelle de normes hölderiennes de plus en régulières. Par ailleurs, nous avons posé :  $\|(u, F)\|_\varsigma := \|F\|_\varsigma + \|u\|_\varsigma$ ,

- (H2) signifie que l'application est  $C^u$  – douce ;
- (H3) traduit la continuité par rapport à la seconde variable ;
- (H4)  $\mathbf{T}$  est différentiable par rapport à sa première variable si  $\mathbf{T}[u, F] = 0$ . L'opérateur linéaire  $\mathbf{L}_{u,F}$  est une approximation à erreur quadratique de  $\partial_u \mathbf{T}[u, F]$ .
- (H5)  $\mathbf{L}_{u,F}$  est inversible à droite, d'inverse  $\ell_{u,F}$ .

Posons l'inverse à droite

$$\ell_{u,F} := \frac{1}{\mathbf{L}_{u,F}} = \frac{\hbar^u}{F \circ \Upsilon^u}$$



---

qui est bien défini sous les hypothèses 2.7.1, pour  $F$  proche de  $F^\circ > 0$  sur  $\Gamma^\circ$ .

On en déduit qu'avec les notations des Théorèmes 2.7.1 et 2.7.2, si  $\mathbf{T}$  vérifie les hypothèses (H1)-(H5), alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq 2 + \alpha$  tels que pour tout  $F$  vérifiant  $\|F - F^\circ\|_\kappa \leq \epsilon$ ,  $\forall \kappa \geq \kappa_0$ , l'équation  $\mathbf{T}[u, F] = 0$  est résoluble et la solution est  $C^\infty$ .

**Commentaires 2.7.5** Il est nécessaire de recourir au Théorème de Nash-Moser, car le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas ici car  $\partial_u \mathbf{T} : C^\varsigma(\Gamma^u) \longrightarrow C^{\varsigma-1}(\Gamma^u)$ . Cette perte de régularité sur la dérivée provient de ce que l'on impose sur la frontière libre des conditions d'ordres différentiels différents (Dirichlet - Neumann). En revanche si l'on considère  $\mathbf{T} : C^\infty(\Gamma^u) \longrightarrow C^\infty(\Gamma^u)$ , alors l'approximation linéaire de sa différentielle  $\partial_u \mathbf{T}$  qui consiste en la multiplication par  $\mathbf{L}_{u,F}$  est une bijection de  $C^\infty(\Gamma^u)$  dans  $C^\infty(\Gamma^u)$  et donc, en conséquence du Théorème 2.7.2, cela permet de résoudre l'équation :  $\mathbf{T}[u, F] = 0$  au voisinage d'une solution particulière  $(u^\circ, F^\circ)$ . Il est possible de se convaincre que  $\partial_u \mathbf{T}$  n'est pas inversible en général.

**Commentaires 2.7.6** Au regard des techniques employées par A. BONNET & R. MONNEAU dans [24] basée sur la Théorie de Nash-Moser, il semble possible de conduire la preuve du Théorème 2.7.1 en appliquant le Théorème d'inversion locale de Nash-Moser (donné en Annexe : Théorème A.0.1) dans l'espace de Frechet  $C^\infty$ . en posant  $\mathbf{T}[u, F] := U^u \circ \Upsilon^u$  sur  $\Gamma^u$ , pour  $(u, F) \in \mathcal{O}$ , où  $U^u$  est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta U^u = F & \text{sur } \Omega^u. \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \partial_{n^u} U^u = 0 & \text{sur } \Gamma^u. \end{cases}$$

## 2.7.2 Stabilité locale : généralisation du théorème de Schaeffer

En conséquence de la dépendance continue aux données de la solution de (2.2), L. CAFFARELLI [29] (voir aussi [113]) a obtenu des estimations fines de la mesure de la différence symétrique de deux zones de contact associées à des données suffisamment régulières sous une hypothèse de non-dégénérescence. Ces estimations permettent d'établir un théorème de « stabilité locale » pour la zone de contact, affinant le Théorème de Schaeffer 2.7.1, avec des données moins régulières. Pour souligner les efforts qui ont été déployés autour de ces questions de stabilité nous rappelons sans preuve les énoncés précis donnés par L. Caffarelli.

**Théorème 2.7.3** [113] *Plaçons nous dans la situation d'un obstacle régulier  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , sur  $\Omega$  un domaine borné à bord lipschitz,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $G = 0 > \psi$  sur  $\partial\Omega$  on a alors :*

$$F \mathbf{1}_{\mathcal{I}} + \Delta U = F + \Delta \psi \mathbf{1}_{\mathcal{I}}, \text{ presque partout sur } \Omega. \quad (2.45)$$

*En outre, si  $\tilde{U}$  désigne la solution attachée au chargement  $\tilde{F} \in L^2(\Omega)$  :*

$$\|F \mathbf{1}_{\mathcal{I}} - \tilde{F} \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{I}}}\|_{L^1} \leq \|F - \tilde{F}\|_{L^1} + \|U - \tilde{U}\|_{L^1}.$$

*où  $\mathcal{I}$  et  $\tilde{\mathcal{I}}$  sont les ensembles de coïncidence associés à  $F$  et  $\tilde{F}$ .*

*De plus pour  $\tilde{\psi} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , imposons*

$$\Delta \psi - F \geq \delta_0 > 0, \text{ et } \Delta \tilde{\psi} - \tilde{F} \geq \delta_0 > 0 \text{ p.p. sur un ensemble mesurable } B \subset \Omega.$$

*Alors il existe  $C > 0$  :*

$$\Lambda_2(\mathcal{I} \div \tilde{\mathcal{I}} \cap B) \leq \frac{C}{\delta_0} \left( \|F - \tilde{F}\|_{L^1} + \|U - \tilde{U}\|_{L^1} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{\mathbb{W}^{2,1}} \right),$$

*où la différence symétrique  $\mathcal{I} \div \tilde{\mathcal{I}}$  est  $(\mathcal{I} \setminus \tilde{\mathcal{I}}) \cup (\tilde{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{I})$ .*

**Commentaires 2.7.7** La formule 2.45, quoique moins fine que la formule du Corollaire 2.4.1, permet de voir (2.2) comme un problème aux limites donné par une équation faisant intervenir une discontinuité non-linéaire représentée par  $\mathbf{1}_{\mathcal{I}}$ . Ceci étant fortement lié au fait que la réaction dans (2.2) est à densité si les données sont assez régulières.

Nous pouvons encore une fois souligner le rôle important de l'hypothèse de non-dégénérescence sans laquelle les formules ci-dessus n'ont plus de sens ! Dès que celle-ci est vérifiée (même localement) les zones de contact sont proches (localement) si les données le sont.

**Théorème 2.7.4** [29] *Soient  $\psi, \tilde{\psi} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ , sur  $\Omega$  un domaine à bord  $C^{1,1}$ ,  $g = 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $f, \tilde{f} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  vérifiant :*

$$\Delta \psi - F, \text{ et } \Delta \tilde{\psi} - \tilde{F} \geq \delta_0 > 0 \text{ p.p. sur une boule } \mathbb{B} \subset \Omega. \quad (2.46)$$

*Supposons que  $\partial\mathcal{I} \cap \mathbb{B}$  soit un graphe paramétré par  $\phi \in C^1$ , alors pour  $B \subset\subset \mathbb{B}$  tel que  $\partial B \in C^{0,1}$ , il existe  $C > 0$  et  $\beta_0 > 0$  tel que si*

$$\beta := \|F - \tilde{F}\|_{L^1} + \|U - \tilde{U}\|_{L^1} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{\mathbb{W}^{2,1}} \leq \beta_0$$

*tel que  $\partial\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{B}$  est également un graphe paramétré par  $\tilde{\phi} \in C^1$  avec localement dans  $B$  :*

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_{C^{0,\alpha_o}} \leq C \beta^{\frac{1-\alpha_o}{2}}, \quad 0 \leq \alpha_o < 1.$$

**Commentaires 2.7.8** En supposant que la frontière libre soit localement de classe  $C^{m+1,\alpha}$ , pour des petites perturbations des données dans la même classe de régularité ( $F, \psi \in C^{m,\alpha}$ ),

sous l'hypothèse de non-dégénérescence (2.46) la frontière perturbée reste proche et localement de même régularité.

Il s'agit donc d'une généralisation locale du théorème de stabilité de Schaeffer, admettant la perturbation des obstacles (non plats).

## 2.8 Continuation pour le problème de l'obstacle pour une membrane

### 2.8.1 Présentation du cadre et des objectifs

Nous voulons savoir comment évolue la déformation d'une membrane au voisinage d'un obstacle quand le chargement varie. L'idée de continuation numérique est motivée par l'étude des instabilités (points de bifurcation ou de retournement) des membranes en grandes déformations dans ce cas contraint. Il est naturel en premier lieu de se questionner sur la continuation pour (2.2), i.e. quand la force varie proportionnellement à une donnée  $F \in L^2(\Omega)$ . C'est pourquoi le chargement dans (2.2) devient  $tF$  et on s'intéresse à la courbe  $t \mapsto U(t)$  (où  $t \in \mathbb{R}^+$ ) dans le problème suivant, avec  $F \in L^2(\Omega)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U(t) \in \mathbb{K}_{\psi,G} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla U(t) \nabla (V - U(t)) d\Omega \geq -t \int_{\Omega} F(V - U(t)) d\Omega \\ \forall V \in \mathbb{K}_{\psi,G}. \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Nous avons vu que ce problème peut se formuler en termes de projection :

$$U(t) = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(t\Delta^{-1}(F)),$$

où  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$  est l'opérateur de projection sur le convexe  $\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\psi,G}$  pour le produit scalaire défini par la forme bilinéaire  $\mathbf{a}$  (associée au premier membre de (2.47)) sur  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ , et  $\Delta^{-1}$  est l'opérateur de Green<sup>9</sup> associé à  $\mathbf{a}$ . L'étude de la courbe  $t \mapsto U(t)$  ne peut pas se faire grâce au théorème des fonctions implicites classiques puisque  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$  n'est pas Fréchet différentiable en général.

Nous savons tout de même que la courbe  $t \mapsto U(t)$  est lipschitzienne ( $C^{0,1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}_G^1(\Omega))$ ).

**Commentaires 2.8.1** Grâce aux Théorèmes 2.7.1 et 2.6.2, nous avons un résultat de différentiabilité dans le cas où toutes les données sont lisses. Dans (2.47) dans le cas où  $\partial\Omega$  une courbe  $C^\infty$ ,  $\psi$  un obstacle  $C^\infty$ , avec  $\psi < 1 = G$  sur  $\partial\Omega$ , et  $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , vérifiant  $F - \Delta\psi \geq \delta_0 > 0$  sur  $\Omega$ . Alors aux points  $t$  tels que  $\mathcal{I}_t$  est une surface lisse la fonction  $t \mapsto U(t)$  est  $C^\infty$ . Du Théorème 2.6.2, nous déduisons que pour presque tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \mapsto U(t)$  est  $C^\infty$ . Cependant nous ne savons pas dire si pour une force donnée la zone de contact est ou non régulière. Le Théorème de stabilité de Schaeffer peut être vu comme une résultat de sensibilité dans  $C^\infty$ , mais avec une hypothèse sur la nature de la zone de contact,

<sup>9</sup>C'est à dire pour tout  $Z \in L^2(\Omega)$ ,  $-\Delta W = Z$  sur  $\Omega$  et  $W = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

ce dont nous souhaiterions bien se passer. De plus nous ne savons rien dire pour le moment du cas où  $F \in L^2(\Omega)$  : c'est le propos de la section suivante.

### 2.8.2 Dérivée conique pour le problème d'obstacle (2.2)

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux propriétés de dérivabilité *conique* pour le problème (2.2), afin d'obtenir un développement limité de sa solution, i.e. que dire de  $\partial_F U$  ? Puisque le cône convexe des déplacements cinématiquement admissibles  $\mathbb{K}_\psi$  est *polyédrique*, nous pouvons alors appliquer la théorie de l'analyse de sensibilité présentée dans l'Annexe B dans le but de connaître une dérivée directionnelle de la solution du problème d'obstacle (2.2) par rapport à la commande que nous avons choisie à savoir la force  $F$ . D'après les résultats de régularités précédents, nous savons que la réaction  $\mu(F) = F - \Delta U \in L^2(\Omega)$ . Nous donnons l'expression de l'espace tangent<sup>10</sup>, des cônes normal et critique.

$$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(U) := \{U \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \mid U \geq 0 \text{ q.p. sur } \{U = \psi\}\},$$

$$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(U) := \{\mu \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{M}^+(\Omega) \mid \mu(\{U > \psi\}) = 0\},$$

$$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0) := \{Z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \mid Z \geq 0 \text{ q.p. sur } \mathcal{I}(F_0), \quad Z = 0 \text{ q.p. sur } \text{Supp}(\mu)\}.$$

Grâce au théorème B.0.3 on peut énoncer :

**Théorème 2.8.1** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ . Dans le problème (2.2) l'application  $F \mapsto U(F)$  de  $L^2(\Omega)$  dans  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  est directionnellement différentiable et sa  $C$ -dérivée dans la direction  $H$  est la solution  $Z_0$  du problème*

$$\min_{Z \in \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla Z\|^2 + H Z d\Omega,$$

*i.e  $Z_0 := U'_0(\cdot, H)$  si  $F := F_0 + tH \in L^2(\Omega)$  avec  $t > 0$  et  $U_0$  solution de (2.2) associée à  $F_0$ . C'est à dire que  $U$  admet le développement limité suivant :*

$$U(F) = U(F_0) + tZ_0 + o(t), \text{ avec } t \geq 0.$$

La condition  $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$  indique que l'obstacle  $\psi$  est borné et autorise  $\psi$  à n'être que  $C_{mex}^1 \cap C^0(\Omega)$ . Il existe des situations où le cône critique est un espace vectoriel, ce qui simplifie l'expression de cette dérivée.

**Proposition 2.8.1** *Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.8.1, si le cône critique de (2.2) est un espace vectoriel alors  $F \mapsto U(F)$  est Gâteaux-dérivable en  $F_0$  dans la direction  $H$  et sa  $G$ -dérivée vérifie :*

$$\begin{cases} \Delta Z_0 = H & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{I}(F_0), \\ Z_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ Z_0 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F_0). \end{cases} \quad (2.48)$$

<sup>10</sup>Nous renvoyons l'annexe pour la définition de la capacité  $\text{Cap}_1$ , et à [20] pour les propriétés classiques relatives aux propriétés vérifiées  $\text{Cap}_1$ -quasi-partout (q.p.).

Quand le contact est *affleurant*  $\text{Cr}_{\mathbb{K}}$  n'est pas un espace vectoriel. C'est l'inverse si l'hypothèse de non-dégénérescence est vérifiée sur une zone contact assez régulière<sup>11</sup>.

**Proposition 2.8.2** *Avec les notations et hypothèses du Théorème 2.8.1, l'hypothèse de contact franc entre la membrane et l'obstacle (i.e.  $\text{supp}(\mu(F_0)) = \mathcal{I}(F_0)$ , également appelée complémentarité stricte) est équivalente à la linéarité du cône critique qui dans ce cas s'écrit :*

$$\text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0) := \{Z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \mid Z = 0 \text{ q.p. sur } \mathcal{I}(F_0)\}.$$

*En particulier cette condition est satisfaite sous l'hypothèse de non-dégénérescence*

$$F_0 - \Delta\psi \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}(F_0), \text{ avec un obstacle } \psi \in C^2(\overline{\Omega})$$

*et en supposant que  $\mathcal{I}(F_0)$  est un parfait non vide (à un ensemble de capacité nulle près) ayant un bord régulier sauf en nombre fini de point.*

F. MIGNOT [95] a discuté des propriétés de dérivabilité générique et presque partout pour les applications lipschitziennes. Le théorème suivant se rapproche de l'idée de la Conjecture de Schaeffer.

**Théorème 2.8.2** *Considérons le problème (2.2),  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , alors :*

- *Pour  $p \geq 2$ , il existe un ensemble négligeable de  $L^p(\Omega)$ , noté  $\mathcal{N}$ , tel que pour tout  $F \in L^p(\Omega) \setminus \mathcal{N}$ , l'application  $F \mapsto U(F)$  est Gâteaux-différentiable.*
- *Il existe un ensemble négligeable de  $L^2(\Omega)$ , noté  $\mathcal{N}$ , tel que pour tout  $F \in L^2(\Omega) \setminus \mathcal{N}$ , l'application  $F \mapsto U(F)$  est Fréchet-différentiable.*

**Commentaires 2.8.2** Ce théorème provient d'une propriété de différentiabilité des applications Lipschitziennes entre espaces de Hilbert séparables qui n'est pas générique en ce sens que le complémentaire de  $\mathcal{N}$  n'est pas forcément un  $G_\delta$ , (c.f. Remarque 3 de [95]) Il est donc plus faible que le théorème de Monneau, et ne répond pas à la Conjecture de Schaeffer. D'après la proposition 2.8.2 la différentiabilité de l'application  $F \mapsto U(F)$  n'est pas équivalente à la régularité de  $\mathcal{I}(F)$ .

## 2.8.3 Evolution de la zone de contact en fonction du chargement et dérivée

### 2.8.3.1 Exemple 1 : « obstacle plat »

Soit  $\Omega$  le disque unité du plan, on cherche la solution de (2.2) axisymétrique pour un obstacle  $\psi \equiv -1$ , soumise à  $F(x, t) = t$ .

La solution (voir figure 2.5) en fonction du paramètre  $t$  est de la forme :

<sup>11</sup>Rappelons qu'un parfait est un compact égal à la fermeture de son intérieur.

---

– Pour  $t \leq 4$ ,  $U_t(r) = \frac{t}{4}(r^2 - 1)$ ;  $0 \leq r \leq 1$ .

– Pour  $t > 4$ ,  $U_t(r) = -1$ ; pour  $0 \leq r \leq R$ , et pour  $R \leq r \leq 1$

$$U_t(r) = \frac{r^2}{(2R^2 \ln(R) + 1 - R^2)} + \left( -1 + \frac{(1 - R^2)}{(2R^2 \ln(R) + 1 - R^2)} \right) \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{(2R^2 \ln(R) + 1 - R^2)},$$

avec

$$t = \frac{4}{(2R^2 \ln(R) + 1 - R^2)}.$$

Le calcul direct de la dérivée conique de ( $U_t$  par rapport à  $t$ ) montre bien qu'elle est solution du problème de Dirichlet sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence annoncé par le Théorème 2.8.1 :

– Pour  $t \leq 4$ ,  $\frac{d^+}{dt} U_t(r) = \frac{1}{4}(1 - r^2)$ ;  $0 \leq r \leq 1$ .

– Pour  $t > 4$ ,  $\frac{d^+}{dt} U_t(r) = 0$ ; pour  $0 \leq r \leq R$ , et

$$\frac{d^+}{dt} U_t(r) = \frac{1}{4}(1 - r^2) + \frac{R^2 \ln(r)}{2} + tRR' \ln(r); \text{ pour } R \leq r \leq 1, \text{ avec } RR' \ln(R) = -\frac{1}{t^2}.$$

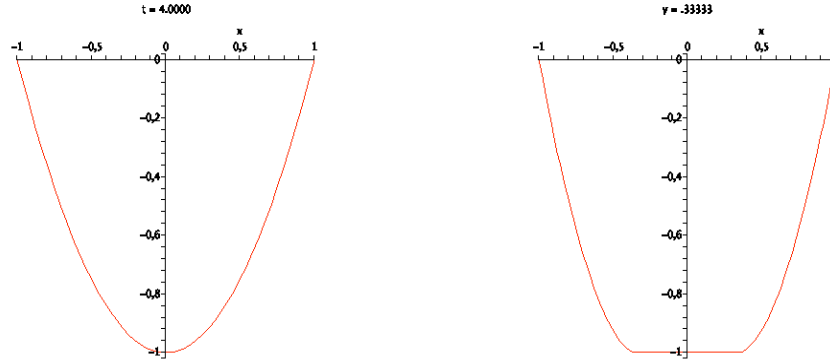


FIG. 2.5 – graphe de la déformation d'une membrane circulaire sur un obstacle plan

### 2.8.3.2 Exemple 2 : « obstacle pointu »

• Examinons la déformation d'une membrane élastique linéaire de forme circulaire sous chargement constant  $F(x, t) = t$  et placée au dessus d'un obstacle « pointu »). Posons  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Omega = \mathbb{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\psi(r) = -1 - r$ .

Dans ce cas, la solution (voir figure 2.6) de (2.2) est axisymétrique et explicite :

- $t < 4$ ,  $U(r, t) = \frac{t}{4}(r^2 - 1)$  : Solution équation, la membrane ne touche pas l'obstacle.
- $t = 4$ ,  $U(r, t) = (1 - r^2)$  : Point de transition, la membrane touche l'obstacle en  $r = 0$  et le contact est affleurant.
- $t > 4$ ,  $U(r, t) = -1 - r$  si  $r < y$  et  $U(r, t) = \frac{t}{4}r^2 + a \ln(r) - \frac{t}{4}$  la membrane touche l'obstacle suivant le disque  $\overline{\mathbb{B}^2}(0, R)$  et le contact est franc, avec  $t$  fonction monotone de  $R$  (voir figure 2.7) :

$$t = 4 \left[ \frac{-1 - R + R \ln(R)}{R^2 - 2R^2 \ln(R) - 1} \right] \text{ telle que } 4 \left[ \frac{-1 - R + R \ln(R)}{R^2 - 2R^2 \ln(R) - 1} \right] \xrightarrow{R \rightarrow 0} 4,$$

et

$$a = -R - \frac{t}{2}R^2.$$

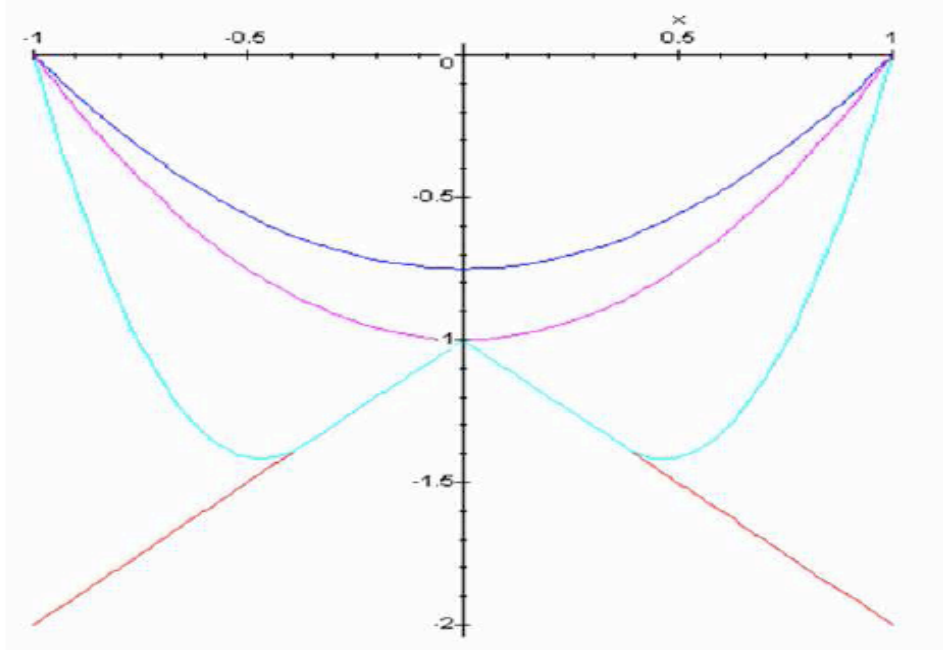


FIG. 2.6 – allure du graphe de la solution de (2.2) pour  $\psi(x, y) := -1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

• Rappelons que le problème de l'obstacle pour le fil élastique linéaire (en petites déformations) est décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K}_\psi = \{v \in \mathbb{H}_0^1(-1, 1) / v \geq \psi\}, \\ \int_{-1}^1 u'(v - u)' dx \geq - \int_{-1}^1 f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

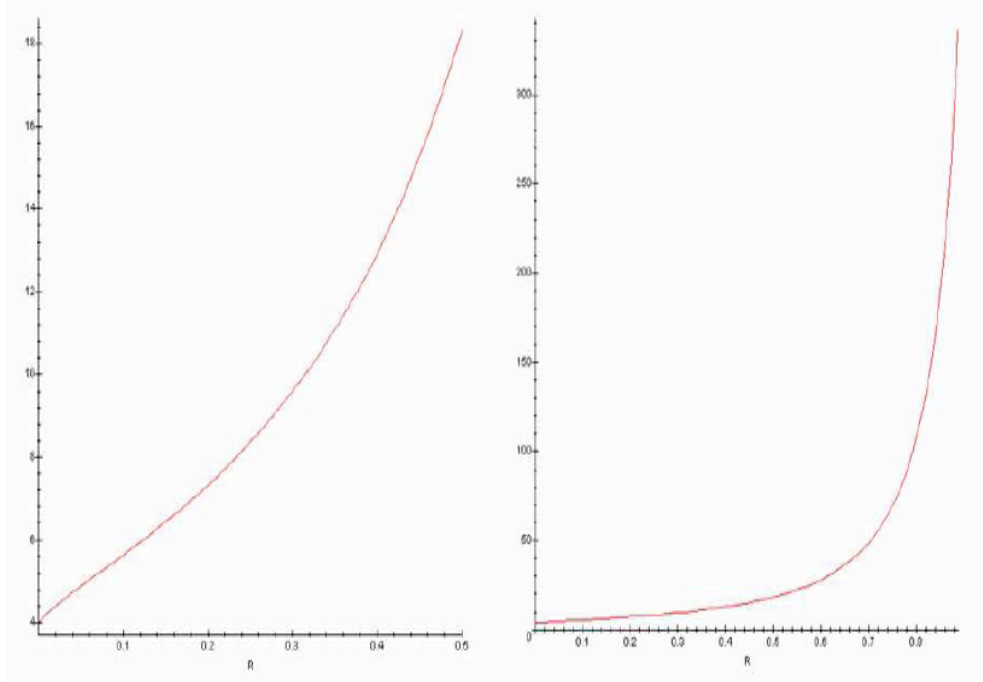


FIG. 2.7 – monotonie de  $t$  en fonction de  $R$ .

Si nous choisissons  $(x, t) \mapsto f(x, t) := t$  et  $x \mapsto \psi(x) = -1 - |x|$  la solution (voir figure 2.8) de (2.49) s'écrit :

- $t < 2$ ,  $u(x, t) = \frac{t}{2}(x^2 - 1)$  : Solution équation, le fil ne touche pas l'obstacle.
- $t = 2$ ,  $u(r, t) = (x^2 - 1)$  : Point de transition, le fil touche l'obstacle en  $x = 0$  et le contact est affleurant.
- $2 < t \leq 4$ ,  $u(x, t) = \frac{t}{2}x^2 - (-1 + \frac{t}{2})|x| - 1$  : Point de transition, le fil touche l'obstacle en  $x = 0$  et le contact est franc avec  $\text{Cap}_1(\{u = \psi\}) > 0$  et  $\Lambda_1(\{u = \psi\}) = 0$ .
- $t > 4$ ,  $u(x, t) = -1 - |x|$ , si  $|x| < 1 - 2\sqrt{t}$ , et  $u(x, t) = \frac{t}{2}x^2 - (1 + t - 2\sqrt{t})|x| + 1 + \frac{t}{2} - 2\sqrt{t}$  sinon : le fil touche l'obstacle sur un segment  $\{u = \psi\} := [y, y]$  et le contact est franc, avec  $y = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}}$ .

### 2.8.3.3 Exemple 3 : « obstacle à deux bosses »

S-N.CHOW & J.MALLET-PARET [33] ont étudié la structure de la zone de contact de (2.2) par perturbation d'un obstacle à deux bosses. Pour cela ils se donnent un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  régulier (i.e à bord  $C^\infty$ ), un obstacle  $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , avec  $\psi$ , sur  $\partial\Omega$  tel que le graphe de  $\psi := \psi_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$  qui ait exactement deux maxima relatifs, vus localement comme deux obstacles strictement concaves de hauteurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , sur lequel est étirée une membrane élastique fixée à 0 à son bord  $\partial\Omega$ . De plus entre les deux maxima relatifs de  $\psi$ , imposons



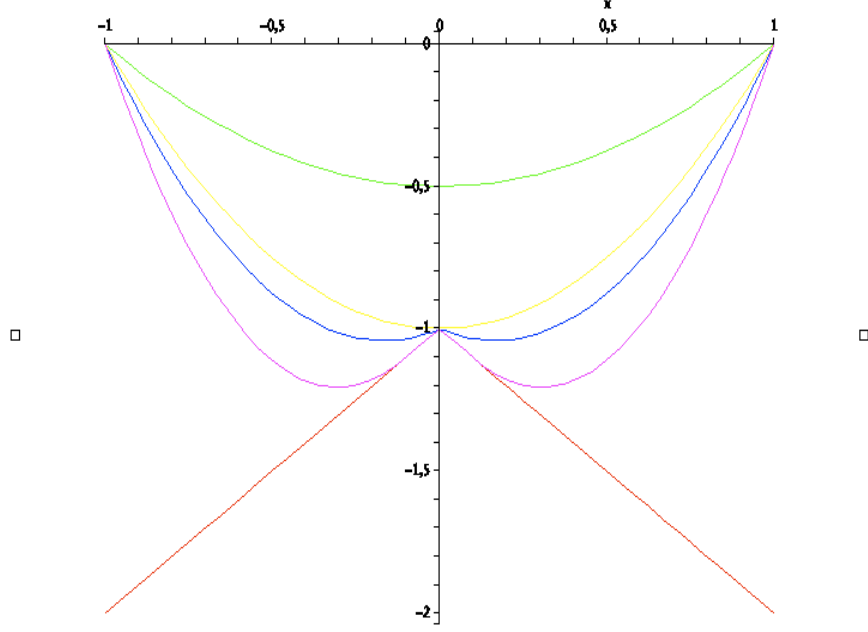


FIG. 2.8 – allure du graphe de la solution de (2.49) pour  $\psi(r) := -1 - |x|$

qu'il n'y ait qu'un point critique qui soit un point selle non dégénéré  $X^s$ .

**Théorème 2.8.3** [33] • Supposons que les deux maxima locaux de  $\psi$  soient de même ordre au voisinage de zéro, i.e vérifient :

$$a_1 \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \leq a_2, \text{ où } \varepsilon_j > 0 \text{ \& } a_j > 0.$$

Alors la frontière libre  $\partial\mathcal{I}$  consiste en deux courbes de Jordan de classe  $C^\infty$ , notées  $\Gamma_j$  dans un  $\varepsilon$ -voisinage des deux maxima de  $\psi$ . Le voisinage en question est l'intérieur d'une ellipse que l'on peut expliciter.

• Plus généralement pour  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in ]\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}[$ , la frontière libre est de la forme  $\partial\mathcal{I} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , où  $\Gamma_j$  est une  $C^\infty$ -courbe de Jordan, ou point ou bien vide, au voisinage d'un pic. De plus il existe deux fonctions monotones continues  $\bar{\varepsilon}_j(\varepsilon_{3-j})$  telles que :

1. pour  $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2(\varepsilon_1)$ ,  $\Gamma_1$  est une courbe et  $\Gamma_2 = \emptyset$ ,
2. pour  $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2(\varepsilon_1)$ ,  $\Gamma_1$  est une courbe et  $\Gamma_2$  est un point,
3. pour  $\varepsilon_2 > \bar{\varepsilon}_2(\varepsilon_1)$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux courbes et  $\varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1(\varepsilon_2)$ .

**Remarque 2.8.1** La perturbation lisse de l'obstacle n'engendre pas de singularité, mais change la nature topologique de la zone de contact.

A présent appliquons une force constante  $F = t$  sur la membrane avec  $\psi$  tel que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Alors quand  $t$  augmente la zone de contact a deux composantes connexes bordées toutes les deux par une courbes de Jordan  $C^\infty$  tant que le  $X^s \notin \mathcal{I}_t$ . Dès que  $t > \Delta\psi$  on peut assurer que la courbe la frontière libre  $\partial\mathcal{I}_t$  est de classe  $C^\infty$ . La transition s'effectue via un point

---

singulier double en un certain  $t^s$  en lequel il existe une dérivée au sens de Gâteaux mais pas au sens de Fréchet.

#### 2.8.3.4 Exemple 4 : « contact affleurant sur un disque »

Nous nous intéressons à la déformation sur un plan  $\psi = -1$  d'une membrane circulaire,  $\Omega := \overline{\mathbb{B}^2}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  par une force  $F := t \mathbf{1}_{\Omega \setminus \overline{\mathbb{B}^2}(0, R_1)}$  constante uniforme sur  $\Omega \setminus \overline{\mathbb{B}^2}(0, R_1)$  avec  $(R_1 < 1)$ . Dans ce cas la déformation de la membrane grandit avec  $t$  tant qu'elle ne touche pas l'obstacle, puis le contact s'effectue alors sur tout le disque  $\mathbb{B}^2(0, R_1)$  sans réaction (contact affleurant). Enfin l'ensemble de coïncidence devient un disque de rayon  $R > R_1$  avec contact franc sur  $\mathbb{B}^2(0, R) \setminus \mathbb{B}^2(0, R_1)$ . Dès qu'une zone de contact commence à apparaître, seule une dérivée conique de la solution  $U$  existe, puisque le cône critique n'est pas un espace vectoriel.

**Commentaires 2.8.3** La dérivée conique coïncide avec la Gâteaux-dérivée quand  $\text{Cr}_{\mathbb{K}}$  est un espace vectoriel. En particulier d'après la Proposition 2.8.2 si  $F \in L^2(\Omega)$ , et  $\psi \in H^2(\Omega)$  un nombre fini de points singuliers de types cusps n'influencent pas l'existence de la dérivée première. Par contre, les changements de nature topologique de la zone de contact empêchent  $\frac{d^+}{dt} U_t$  la dérivée conique de  $U_t$  d'être continue en  $t$ , voir (2.8.1). Choisir les données  $F \in L^2(\Omega)$ , et  $\psi \in H^2(\Omega)$  impose une réaction à densité, par contre si  $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$  alors il existe des situations où certaines solutions du problème de l'obstacle pour un fil élastique (2.49) au voisinage d'un point de transition vérifient  $\text{Cap}_1(\{U_t = \psi\}) > 0$  avec pourtant  $\Lambda_2(\{U_t = \psi\}) = 0$ , donc une réaction qui n'est plus à densité (voir figure 2.8). La perte de l'existence de Gâteaux-dérivée a lieu quand le contact est affleurant sur des zones de capacité non-nulle.

## Chapitre 3

# LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE PLAQUE EN PETITES DEFORMATIONS : RESULTATS GEOMETRIQUES DE STABILITE

*"Les yeux de l'enfant sont des étoiles. Ce n'est pas de la poésie, c'est de la science."*

*Chich Nhat Hanh*

Nous allons à présent nous intéresser à la façon dont une plaque élastique, encastrée sur son bord, entre en contact avec un obstacle rigide, alors qu'elle est soumise à un champ de forces variable. Nous étudions, comme au Chapitre II, le cas des déformations linéarisées dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff. Nous rappelons l'écriture de ce modèle comme un problème à frontière libre régi par une inéquation variationnelle d'ordre quatre. Les recherches sur les plaques linéaires en contact unilatéral ont été initiées dans les années 1980, grâce à elles nous disposons de résultats d'existence, d'unicité, de régularité de la solution, que nous synthétisons brièvement. D'autres plus rares concernant la nature topologique et géométrique de l'ensemble de coïncidence, sont ici rapidement présentées et complétées. Après quoi nous aborderons le problème de la *stabilité*, à propos duquel seules sont disponibles quelques études de B. Schild et D. Adams. Il s'agit en fait de résultats assez techniques de convergence dans l'espace  $\mathbb{H}_{loc}^3$ . Nous poursuivrons par l'énoncé et la preuve d'une adaptation du théorème de stabilité de Schaeffer au cas du bilaplacien en présence d'un obstacle plat. Puis nous discutons de la façon dont on peut traiter le cas d'un obstacle lisse de forme générale. Nous commentons ensuite sur quelques exemples la nécessité des hypothèses assurant la stabilité de la zone de contact.

---

## 3.1 Présentation du problème et premiers résultats

### 3.1.1 Cadre & Hypothèses

Afin de pouvoir prendre en compte le phénomène de contact entre une plaque mince linéairement élastique et un obstacle, nous supposons dans toute la suite être dans la configuration suivante :

- Au-dessous de la plaque est placé un obstacle se comportant comme un *solide rigide*. Il est représenté par le graphe de la fonction  $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\vec{e}_3$ .
- Le contact entre la plaque et l'obstacle s'effectue *sans frottement*.

Du coup, la réaction de l'obstacle à l'appui de la plaque sous le chargement  $\vec{F}$  est notée  $\mu(\vec{F})$ , elle est positive et portée par  $\vec{e}_3$ .

Finalement l'équilibre local de la flexion d'une plaque mince élastique soumise à un champ de forces  $F := F_3$  normale, encastrée sur son bord  $\partial\Omega$ , et placée au dessus d'un obstacle rigide  $\psi$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} D\Delta^2 U & = & F + \mu(F) \quad \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ U & \geq & \psi \quad \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) & \geq & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Nous posons pour la suite  $D = 1$ .

**Remarque 3.1.1** Le problème d'équilibre sans obstacle (1.6) et (1.5) est posé dans un domaine bidimensionnel  $\Omega$ , le feuillet moyen du domaine 3D initial. En présence de contact avec un obstacle, le contact a lieu *physiquement* au bord du domaine 3D. Dans [85] A. LÉGER & B. MIARA ont justifié que la prise en compte du contact dans le problème de la flexion d'une plaque élastique linéaire consiste à mettre les conditions unilatérales sur le feuillet moyen, comme cela apparaît dans (3.1),  $U \geq \psi$  sur  $\Omega$  et place de  $\mu(F)$ .

**Définition 3.1.1** La zone contact ou ensemble de coïncidence  $\mathcal{I}(F)$  est l'ensemble des points où la plaque, soumise à une force  $F$ , touche l'obstacle, i.e.

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

La frontière libre de ce problème est  $\partial\mathcal{I}(F)$ .

### 3.1.2 Formulations faibles primales : Existence, Unicité, caractère bien posé

La formulation variationnelle primale associée à (3.1) est le problème faible suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{K}_\psi \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \Delta U \Delta (V - U) d\Omega \geq \int_{\Omega} F(V - U) d\Omega \\ \forall V \in \mathbb{K}_\psi \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où nous avons introduit le cône convexe :

$$\mathbb{K}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

Ce cône désigne l'ensemble de déplacements cinématiquement admissibles pour le problème (3.1).

**Définition 3.1.2** Notons  $\mathbf{A}$  la forme bilinéaire représentant le travail des efforts intérieurs, définie par :

$$\mathbf{A}(U, V) = \int_{\Omega} \Delta U \Delta V d\Omega,$$

et  $\mathbf{l}$  la forme linéaire définie par  $\mathbf{l}(V) := \int_{\Omega} FV d\Omega$  représentant le travail des efforts extérieurs.

**Théorème 3.1.1** [53] Soit  $\Omega$  un ouvert lipschitzien borné du plan. Soient  $F \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ .

Alors le Problème (3.2) admet une unique solution,  $U \in \mathbb{K}_\psi$ .

De plus le problème faible (3.2) est équivalent au problème de minimisation de l'énergie totale (somme de l'énergie élastique et potentielle) :

$$J(V) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(V, V) - \mathbf{l}(V),$$

sous la contrainte d'appartenance à  $\mathbb{K}_\psi$ , c'est à dire chercher  $U$  solution de :

$$\inf_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V) \quad (3.3)$$

**Preuve :** ♦ Le problème admet une solution unique, en vertu du théorème de Lions-Stampacchia [90], puisque [53] montre que  $\mathbf{A}(U, V) = \int_{\Omega} \Delta U \Delta V d\Omega$  est une forme bilinéaire coercive sur  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ , et la norme définie sur  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$  par  $V \mapsto [\mathbf{A}(V, V)]^{1/2}$  est équivalente à la norme usuelle sur  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ . ♦

Grâce au caractère lipschitzien de la projection orthogonale induite par la forme bilinéaire  $\mathbf{A}$ , rappelons que (3.2) est bien posé au sens d'Hadamard, c'est à dire :

**Théorème 3.1.2** Soit  $\Omega$  un ouvert lipschitzien borné du plan. Soient  $F \in L^p(\Omega)$ , pour  $p > 1$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ ,  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$  alors l'application de  $L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ , qui à  $F_i$  associe l'unique solution  $U_i$  de (3.2), est Lipschitz-continue. C'est à dire il existe  $C > 0$  indépendant de  $F_i$  pour  $i = 1, 2$  tel que :

$$\|U_1 - U_2\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \leq C \|F_1 - F_2\|_{L^p(\Omega)}$$

Certains auteurs ont travaillé avec une formulation différente de (3.2) pour une plaque encastrée sur son bord. Elle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{U} \in \mathbb{K}_{\hat{\psi}} \\ \int_{\Omega} \Delta \hat{U} \Delta (V - \hat{U}) d\Omega \geq 0 \\ \forall V \in \mathbb{K}_{\hat{\psi}} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

**Proposition 3.1.1** Soient  $\psi, \hat{\psi} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\hat{\psi}|_{\partial\Omega} < 0$ , et  $F \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ . Etudier le problème (3.2) revient à étudier le problème (3.4) et réciproquement, pourvu que nous trouvions  $\Psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $-\Delta^2 \Psi = F$  sur  $\Omega$ , et  $\Psi = 0$ ,  $\partial_n \Psi = 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\hat{\psi} := \Psi + \psi$ .

**Preuve** ♦ Il suffit simplement de faire le changement de variable  $\hat{U} := U + \Psi$ . ♦

**Remarque 3.1.2** Avec les hypothèses de la Proposition (3.1.1) nous noterons  $\Delta^{-2}(F)$  la fonction  $\Psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  telle que  $-\Delta^2 \Psi = F$  sur  $\Omega$ , et  $\Psi = 0$ ,  $\partial_n \Psi = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

### 3.1.3 Une absence à remarquer...

Nous avons fait un usage très fréquent du principe du maximum et ses conséquences dans l'étude des membranes (laplacien ou plus généralement les opérateurs elliptiques d'ordre 2). Mais ce principe n'est plus valable pour les opérateurs  $\Delta^p$  avec  $p > 1$  ! En particulier, nous avons, dans le cas d'une membrane, un principe de comparaison assurant un déplacement croissant sous un chargement croissant. Ceci est faux, en général pour une plaque ! Cependant cela n'était pas apparu de façon évidente aux mathématiciens du début du XXième siècle. En effet, en 1904 l'Académie des Sciences soumit l'étude des solutions d'équilibre d'une plaque encastrée à compétition avec à la clé le Prix Vaillant (4000 francs) pour l'année 1907. En 1901 T. Boggio [17], montra que pour  $\Omega := \mathbb{B}^2(0, 1)$  = la boule unité, le principe du maximum pour le bilaplacien avec des conditions d'encastrement est valide. Et J. Hadamard déclara dans son exposé [63], au IVème Congrès mathématiques à Rome en septembre 1908, à propos du principe du maximum pour ce problème :

« Malgré l'absence de preuve rigoureuse, l'exactitude de cette proposition ne paraît pas douteuse pour des aires convexes. »

Plus précisément T. BOGGIO & J. HADAMARD (entre 1901 – 1908) conjecturèrent à propos du problème de plaque linéaire encastrée sur son bord :

---

**Conjecture : Principe du maximum de Boggio - Hadamard**

*Soient  $\Omega$  un domaine convexe du plan et  $F$  suffisamment réguliers.*

$$\text{Si } F \geq 0 \text{ sur } \Omega, \text{ alors } U \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ avec } \begin{cases} \Delta^2 U = F & \text{sur } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

Déjà en 1909 J. Hadamard fit observer que cette précédente conjecture est fausse pour un domaine annulaire. Le premier contre-exemple à la conjecture de Boggio-Hadamard est dû à R.J. Duffin en 1949. Il montra que la fonction de Green associée à  $\Delta^2$  change de signe si  $\Omega$  est un rectangle de longueur infinie. Il fut suivi de nombreux autres, par exemple P.R. Garabedian [69] en 1951 démontra que la conjecture est fausse en prenant pour domaine  $\Omega$  une ellipse ayant une excentricité suffisante donnée par :

$$\overline{\Omega} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + \frac{5}{3}x_2^2 \leq 1\}$$

et une force  $F$  régulière.

Après 47 ans de contre-exemples, H.-Ch. Grunau et G. Sweers certifièrent que le principe du maximum de Boggio-Hadamard (3.5) vaut seulement pour des domaines « proches » de la boule, au sens de la définition suivante.

**Définition 3.1.3** [75] *Pour  $\epsilon > 0$  fixé,  $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$  est dit  $\epsilon$ - $C^{k,\alpha}$ -proche de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , s'il existe une  $C^{k,\alpha}$ -application  $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$  vérifiant  $f(\overline{\Omega'}) = \overline{\Omega}$  et*

$$\|f - Id\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq \epsilon.$$

Voici l'énoncé exact de ce principe du maximum, paru en 1996 (un énoncé similaire est valable de façon générale pour les opérateurs suffisamment proches d'un opérateur polyharmonique).

**Théorème 3.1.3** [75] *Il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \epsilon \in [0, \epsilon_0[$  pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine de bord  $\partial\Omega \in C^{4,\alpha}$  et  $\epsilon$ - $C^{4,\alpha}$ -proche de la boule unité  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{R}^2$ , si  $U \not\equiv 0$  satisfait  $\Delta^2 U \geq 0$  sur  $\Omega$  avec  $U = 0 = \partial_\nu U = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors  $U$  est strictement positive sur  $\Omega$ .*

Le  $\epsilon_0 > 0$  peut être calculé explicitement.

Ce théorème permet de montrer que le principe du maximum est bien valable pour les ellipses d'excentricité inférieure à environ 2.

**Remarque 3.1.3** Si on remplace les conditions d'encastrement, d'appui simple ou de bord libre par les conditions aux limites dites de Navier :

$$U = \Delta U = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.6)$$

il subsiste un « Principe du Maximum » classique i.e :

---

**Proposition 3.1.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert lipschitzien, soit  $F \geq 0$  dans  $L^2(\Omega)$ , alors sous les conditions de Navier*

$$\Delta^2 U \geq F \text{ dans } \Omega \implies U \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Malheureusement, les conditions de Navier, ci-dessus, ne correspondent pas, en général, à des conditions aux limites décrivant le comportement mécanique d'une plaque! Sauf par exemple pour le cas d'une plaque circulaire soumise à un champ de forces radial!

### 3.1.4 Mesure et zone de contact

La formulation variationnelle (3.2) assure d'après le théorème de Riesz-Schwarz, que  $\mathbf{A}(u, \zeta) - \mathbf{l}(\zeta)$  définit une mesure de Radon positive  $\mu(F)$  (notée  $\mu$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) sur  $\Omega$  :

$$\mathbf{A}(U, \zeta) + \mathbf{l}(\zeta) = \int_{\Omega} \zeta d\mu(F) \quad (3.7)$$

Puisque la zone de contact  $\mathcal{I}(F)$  est un compact, il vient immédiatement que sur l'ouvert  $\Omega - \mathcal{I}(F)$ ,  $\Delta^2 U = F$ . Il en découle que le support de  $\mu(F)$  est contenu dans  $\mathcal{I}(F)$ , ce qui signifie que la réaction de l'obstacle est localisée dans la zone de contact :

$$\text{supp}(\mu(F)) \subseteq \mathcal{I}(F)$$

*A priori* la réaction appartient à l'espace  $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ , mais elle est en fait plus régulière, comme nous le verrons avec le Théorème 3.2.4 qui s'interprète, d'après la définition même de la réaction, comme

$$\mu \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.8)$$

Nous verrons à la Remarque 3.2.3, qu'en général  $\mu(F)$  n'est pas une mesure à densité!

1

Nous rappelons une condition suffisante, donnée par B. Schild au Lemme 3.2 de [120], pour qu'une fonction  $U \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  soit une solution de (3.2). Cela nous servira dans la construction de solution explicite de (3.2), afin de garantir que les calculs effectués fournissent effectivement la bonne.

**Lemme 3.1.1** *Soient  $F \in L^2(\Omega)$  et  $U \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  telle que  $\mu := \Delta^2 U - F$  soit une mesure positive, et  $\text{supp}(\mu) \subsetneq \Omega$ . Si pour  $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ , nous avons  $U \geq \psi$  sur  $\bar{\Omega}$  et  $U = \psi$  sur  $\text{supp}(\mu)$ , alors  $U$  est l'unique solution de (3.2).*

**Preuve** ♦ Soit  $v \in \mathbb{K}_{\psi}$ , il est possible de trouver une suite  $(\varphi_k)_k$  de fonctions de classe  $C^2(\bar{\Omega})$  telles que  $\varphi_k \geq \psi$  sur  $\Omega$  et  $\varphi_k \rightarrow v$  dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ . Introduisons  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\text{supp}(\mu)$ , et posons  $v_k := (1 - \chi)v + \chi\psi_k \in \mathbb{K}_{\psi}$ . Nous avons  $v_k \rightarrow v$  dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ . Puisque  $v_k \in C^0(\mathcal{V})$  :

$$\langle \Delta^2(U) - F, U - v_k \rangle = \langle \mu, U - v_k \rangle = \int_{\Omega} (U - v_k) d\mu = \int_{\Omega} (\psi - v_k) d\mu \leq 0.$$

Alors

$$\langle \Delta^2(U) - F, U - v \rangle = \langle \Delta^2(U) - F, U - v_k \rangle + \int_{\Omega} \Delta U \Delta(v_k - v) d\Omega + \int_{\Omega} F(v_k - v) d\Omega$$



$$\leq \left( \|U\|_{\mathbb{H}_0^2} + \|F\|_{L^2} \right) \|v_k - v\|_{\mathbb{H}_0^2} \longrightarrow 0.$$

Ce qui conclut, puisque trivialement  $U \in \mathbb{K}_\psi$ . ♦

## 3.2 Régularité de la solution $U$

Ici, nous rappelons et commentons les résultats connus concernant la régularité de la solution de (3.2). Nous donnons quelques raffinements intéressants sous des hypothèses certes non-optimales mais qui sont satisfaisantes du point de vue mécanique.

### 3.2.1 Régularité intérieure de $U$

En 1973, J. FREHSE a montré un premier résultat de régularité<sup>1</sup> concernant la solution de (3.4). Sa démonstration se fait à l'aide d'une suite régularisante et elle est valable pour  $\Omega$  un domaine à bord lisse de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d$  quelconque.

**Théorème 3.2.1** [58] *Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe du plan, de classe  $C^\infty$ ,  $\hat{\psi} \in \mathbb{W}^{3,\infty}(\Omega)$  alors la solution  $\hat{U}$  de (3.4) vérifie*

$$\hat{U} \in \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega), \quad \Delta \hat{U} \in L_{loc}^\infty(\Omega), \quad D^2 \hat{U} \in L_{loc}^\infty(\Omega).$$

Il en vient que  $\hat{U} \in C^1(\Omega)$  et ses dérivées premières sont localement lipschitziennes.

Dans un article de 1979, L. CAFFARELLI & A. FRIEDMAN [30] montrèrent qu'en dimension 2 les dérivées secondes de la solution  $U$  de (3.4) sont continues. Pour ce faire ils commencèrent par établir l'inégalité suivante (valable en toute dimension finie  $\geq 2$ ) :

**Théorème 3.2.2** [30] *Soient  $\Omega$  un ouvert borné connexe du plan de classe  $C^{2,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\hat{\psi} \in C^2(\bar{\Omega})$  et soit  $\hat{U}$  la solution de (3.4) alors*

$$\Delta \hat{U} \geq \Delta \hat{\psi} \text{ sur } \text{Supp}(\hat{\mu}).$$

**Preuve du Théorème 3.2.2 selon L. Caffarelli & A. Friedman [30]** ♦ Prolongeons la solution  $\hat{U}$  à  $\mathbb{R}^2$ , que nous noterons  $u \in \mathbb{H}_{loc}^2(\Omega)$ . Puis notons  $u_\varepsilon := J_\varepsilon(u)$  une régularisation de  $u$  via

$$J_\varepsilon(G) = \int_{\mathbb{B}^2(X_m - Z, \varepsilon)} j_\varepsilon(X_m - Z) G(Z) dZ,$$

avec  $j_\varepsilon(X_m - Z) = \varepsilon^{-2} j_0(\frac{\|X_m - Z\|}{\varepsilon})$  et  $j_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $j_0(t) = 0$  si  $|t| > 1$  et  $\int_{\mathbb{R}} j_0(t) dt = 1$ . Soit  $X^o \in \Omega$ , supposons alors qu'il en existe un voisinage  $V$  et  $\delta > 0$  tels que

<sup>1</sup>Rappelons que d'une façon générale pour un espace fonctionnel  $H(\Omega)$  de fonctions définies sur  $\Omega$ , on dit que  $h \in H_{loc}(\Omega)$  si pour tout ouvert  $A \subset\subset \Omega$ ,  $h \in H(A)$ .

$$(u_\varepsilon - \psi)(X) > \delta, \quad \forall X \in V. \quad (3.9)$$

Alors  $u_\varepsilon \pm \zeta \in \mathbb{K}_\psi, \forall \zeta \in C_0^\infty(V), \|\zeta\| < \delta$ . D'après la définition même de  $\hat{U}$  il vient :

$$\int_{\Omega} (|\hat{U}|^2) d\Omega \leq \int_{\Omega} (|v|^2) d\Omega, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi, (\text{ en particulier pour } v = u_\varepsilon \pm \zeta).$$

Or puisque

$$\int_{\Omega} (|u_\varepsilon|^2) d\Omega \longrightarrow \int_{\Omega} (|u_\varepsilon|^2) d\Omega$$

Nous avons

$$\int_{\Omega} \Delta \hat{U} \Delta \zeta d\Omega = 0, \text{ d'où } \Delta^2 \hat{U} = 0 \text{ sur } V.$$

Ainsi nous pouvons conclure que le support de  $\mu$  est contenu dans l'ensemble des points où (3.9) n'est pas satisfaite. Il ne reste plus, alors, qu'à démontrer que l'assertion suivante est vraie :

**Assertion :** Il existe une suite de points  $(X_m)_m$  convergeant vers  $X^o$  et une suite de nombres strictement positifs  $(\varepsilon_m)_m$  convergeant vers 0, tels que

$$u_{\varepsilon_m}(X_m) - \psi(X_m) \longrightarrow 0 \quad (3.10)$$

Pour ce faire utilisons la représentation de Green<sup>2</sup> de  $u_\varepsilon$ , donnée par la fonction de Green  $G$  :

$$u_{\varepsilon_m}(X_m) = \frac{1}{\Lambda_2(\mathbb{S}^2(X_m, \varrho))} \int_{\mathbb{S}^2(X_m, \varrho)} u_\varepsilon(Y) d(\mathbb{S}^2)(Y) - \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} \Delta u_\varepsilon(Y) G(X_m - Y) dY. \quad (3.11)$$

où  $G$  désigne la solution fondamentale du laplacien :  $G(X) = \gamma \ln \frac{1}{|X|}$ ,  $\gamma > 0$ , et  $\mathbb{S}^2(X_m, \varrho)$  la sphère bord de la boule  $\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)$ .

De la même façon pour  $\psi_\varepsilon := J_\varepsilon(\hat{\psi})$  une régularisation de  $\hat{\psi}$ , nous avons la représentation de Green :

$$\psi_{\varepsilon_m}(X_m) = \frac{1}{\Lambda_2(\mathbb{S}^2(X_m, \varrho))} \int_{\mathbb{S}^2(X_m, \varrho)} \psi_\varepsilon(Y) d(\mathbb{S}^2)(Y) - \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} \Delta \psi_\varepsilon(Y) G(X_m - Y) dY. \quad (3.12)$$

Puisque  $\hat{U} \geq \hat{\psi}$ , alors  $u_\varepsilon \geq \psi_\varepsilon$  et donc  $\int_{\mathbb{S}^2(X_m, \varrho)} u \geq \int_{\mathbb{S}^2(X_m, \varrho)} \hat{\psi}$ . Grâce à cette inégalité et par (3.10), nous déduisons de (3.12) & (3.11) que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} \Delta u_\varepsilon(Y) G(X_m - Y) dY - \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} \Delta \psi_\varepsilon(Y) G(X_m - Y) dY \right] \geq 0. \quad (3.13)$$

Puis nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} \Delta u_\varepsilon(Y) G(X_m - Y) dY &= \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} G(X_m - Y) dY \int_{\mathbb{B}^2(Y, \varepsilon)} j_\varepsilon(Y - Z) \Delta u_\varepsilon(Z) dZ \\ &= \int_{\mathbb{B}^2(X_m, \varrho)} J_\varepsilon(G) \Delta u_\varepsilon(Y) dY + \eta_{\varepsilon, m} \end{aligned} \quad (3.14)$$

<sup>2</sup>Voir le Théorème 5.10.1 page 233 de [65]

avec  $\eta_{\varepsilon,m} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ , (indépendamment de  $m$ ). Le même type de relation est valable pour la seconde intégrale de (3.14). D'où

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\mathbb{B}^2(X_{m,\varrho})} (J_{\varepsilon_m}(G)) (\Delta u_{\varepsilon_m} \Delta \psi_{\varepsilon_m})(Y) dY \right] \geq 0.$$

Enfin par le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il vient

$$\exists X_{m,\varrho} \in \mathbb{B}^2(X_m, \varrho) \quad / \quad \Delta u(X_{m,\varrho}) - \Delta \psi(X_{m,\varrho}) \geq -\delta_m, \quad \delta_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

En extrayant (par compacité) une sous-suite de  $(X_{m,\varrho})_m$  qui converge vers un point  $X_\varrho$  et en utilisant la continuité de  $\Delta u$  il vient  $\Delta u(X_\varrho) - \Delta \psi(X_\varrho) \geq 0$ . Ainsi quand  $\varrho \rightarrow 0$ ,  $X_\varrho \rightarrow X^o$  et par la continuité de  $\Delta u$ , nous déduisons finalement :  $\Delta u(X^o) - \Delta \psi(X^o) \geq 0$ . ♦

**Remarque 3.2.1** D'après la proposition 3.1.1, nous déduisons la traduction du Théorème 3.2.2 pour (3.2). Cela résulte directement du changement de variables  $\hat{U} - \Psi = U$  avec  $\hat{\psi} \in C^2(\bar{\Omega})$  tel que  $\hat{\psi}|_{\partial\Omega} < 0$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ , avec  $\hat{\psi} := \Psi + \psi$  et  $\Psi \in \mathbb{H}^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$  solution du problème aux limites linéaires de la Remarque (3.1.2). Précisément, pour  $\Omega$  un ouvert borné connexe du plan de classe  $C^{4,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$  et soit  $U$  la solution de (3.2) avec  $F \in L^2(\Omega)$  alors

$$\Delta U \geq \Delta \psi \text{ sur } \text{Supp}(\mu). \quad (3.15)$$

**Remarque 3.2.2** L'inégalité ci-dessus ne peut être stricte que pour des points d'une partie fermée d'intérieur vide de la zone de contact (par exemple une courbe ou plus généralement une partie de mesure de Lebesgue surfacique nulle). En effet sinon,  $U = \psi$  sur un ouvert sur lequel les différentielles premières et secondes coïncident.

**Théorème 3.2.3** [30] Avec les notations et les hypothèses du Théorème 3.2.2 alors :

$$\hat{U} \in C^2(\Omega).$$

Dans un papier de 1984, consacré à la régularité des opérateurs polyharmoniques B. SCHILD [120] démontra le théorème suivant qui précise le comportement d'une plaque soumise à un champ de forces  $F$  en présence d'un obstacle rigide  $\psi$  :

**Théorème 3.2.4** [120] Soient  $\Omega$  un domaine plan, borné de classe  $C^{2,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ , alors la solution de (3.2) vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega).$$

Nous savons donc que la solution de (3.2) est  $\mathbb{H}_{loc}^3 \cap C^2(\Omega)$ , mais ce résultat est optimal !

**Proposition 3.2.1** Avec les hypothèses et notations du Théorème 3.2.4, pour tout sous domaine compact  $K \subset \Omega$ , il n'existe a priori aucune estimation du module de continuité de  $D^2U$  sur  $K$ .

---

**Preuve :** ♦ L. Caffarelli et A. Friedman ont exhibé le contre-exemple suivant [30] :

**Exemple 3.2.1** Soit  $\Omega := \mathbb{B}(0, 1)$ , la boule unité euclidienne de  $R^2$ , et soit  $\psi(r) := \varepsilon - r^2$ , ( $r = |x|$ ). On désigne par  $U := U_\varepsilon$  la solution de (3.4), pour les données précédentes. Nous savons que l'ensemble de non-coïncidence  $\mathcal{N} := \{U > \psi\}$  est ouvert et non vide. Alors

$$\mathcal{N} := \{X \in \Omega \mid r > \delta\}, \quad (3.16)$$

c'est à dire que la zone de contact est un disque de centre 0 et de rayon  $\delta$ . Supposons que (3.16) soit faux, alors il existe  $\alpha < r < \beta$  tels que

$$\begin{cases} U > \psi, & \text{si } \alpha < r < \beta; \\ U - \psi = 0, \quad \partial_r(U - \psi) = 0, & \text{pour } r = \alpha \text{ \& } r = \beta. \end{cases} \quad (3.17)$$

Puisque l'on a

$$\Delta^2(U - \psi) = \Delta^2 U - \Delta^2 \psi = 0 \text{ si } \alpha < r < \beta, \quad (3.18)$$

Il vient que  $U - \psi \equiv 0$  si  $\alpha < r < \beta$ , ce qui est absurde.

Notons que  $\delta > 0$ . En effet, sinon

$$\Delta^2 U = 0 \text{ si } r > 0 \text{ et donc } \Delta^2 U = 0 \text{ si } r = 0, \text{ d'où } U \equiv 0 \text{ sur } \Omega,$$

ce qui est incompatible avec  $U \geq \psi > 0$  si  $r^2 < \varepsilon$ . Puisque nous savons que la solution est de classe  $C^2$ , voyons à présent que

$$\Delta U(1) \geq 0.$$

Comme on a  $\Delta U \geq 0$ , si  $\Delta U(1) < 0$ , alors par le principe du maximum  $\Delta U \leq 0$  sur  $\Omega$ , or

$$\int_{\Omega} \Delta U = \int_{\partial\Omega} \partial_r U = 0.$$

Sachant que  $U = \psi$  si  $r < \delta$ , nous en déduisons que

$$\Delta U(\delta) = \Delta \psi(\delta) = -4$$

et pouvons écrire la forme de  $\Delta U$  sur  $\delta < r < 1$  :

$$\Delta U(r) = -\frac{4 + \Delta U(1)}{\ln(1/\delta)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \Delta U(1). \quad (3.19)$$

Or

$$\int_{\Omega} \Delta U_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

d'où l'on conclut que

$$U_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ \& } \delta \rightarrow 0.$$

Il est clair que (3.19) ne peut avoir de module de continuité sur aucun voisinage compact de l'origine quand  $\delta \rightarrow 0$ . ♦

**Remarque 3.2.3** ► On ne peut pas prétendre à une régularité supérieure pour la solution de (3.2), en particulier car  $U \notin \mathbb{H}^4(\Omega)$ .

► L'exemple 3.2.1 nous permet de montrer que la mesure  $\mu$  n'est pas à densité! En effet en dimension 2, avec la formule (3.19) ci-dessus :

$$\frac{d^3}{dr^3}U(r) > 0 \text{ sur } \Omega \setminus \mathbb{B}(0, \delta) \text{ et } \frac{d^3}{dr^3}U(r) = 0 \text{ sur } \mathbb{B}(0, \delta).$$

Nous savons que  $\mu = \Delta^2 U$ , cette mesure est à densité sur l'intérieur de  $\mathcal{I}$ , mais elle a une partie singulière ayant pour support  $\mathbb{S}^1(0, \delta) = \partial\mathcal{I}$ , donc  $\mu \notin L^2(\Omega)$ .

► B. Schild signale dans [120] (exemple 3.1.) qu'en général  $U \notin \mathbb{W}^{3,\infty}(\Omega)$ . Il exhibe le cas d'une solution de (3.4) pour  $\Omega = \mathbb{B}(0, 2)$  touchant un obstacle  $\hat{\psi}$  polynômial quadratique suivant un segment.

### 3.2.2 Sur la masse totale

Nous montrons ici que la masse totale de  $\Omega$  est finie, notre preuve simplifie celle de [30].

**Théorème 3.2.5** *Supposons  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  puis  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Soit  $U$  la solution du problème (3.2) avec  $U > \psi$  sur  $\partial\Omega$ , alors*

$$\mu(F)(\Omega) < \infty.$$

**Preuve** ♦ Nous travaillons sur la solution  $\hat{U}$  du problème (3.4) après avoir fait le changement de variables *ad hoc*, et notons  $\hat{\mu}$  la réaction associée. Il est clair qu'il existe un compact  $K_0$  de  $\Omega$  tel que  $\text{Supp}(\hat{\mu}) \subset K_0 \subset \overset{\circ}{\Omega}$  et  $\psi - \Delta^{-2}F < 0$  sur  $\Omega \setminus K_0$ . D'après le théorème d'existence de fonctions plateaux, nous pouvons trouver  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  égale à 1 sur un compact  $K$  quelconque de  $\Omega$ . Nous en déduisons

$$\hat{\mu}(K) \leq \int_{\Omega} \phi d\hat{\mu} \leq \|D^2\phi\|_{L^2} \|D^2\hat{U}\|_{L^2}.$$

Puisque  $\hat{U} = \hat{\psi} = \psi - \Delta^{-2}F$  sur  $\text{Supp}(\hat{\mu})$  :

$$\int_{\Omega} |D^2\hat{U}|^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\psi - \Delta^{-2}F) d\hat{\mu} \leq \|[\psi - \Delta^{-2}F]^+\|_{L^\infty} \hat{\mu}(\text{Supp}([\psi - \Delta^{-2}F]^+)).$$

En choisissant  $K = \text{Supp}([\psi - \Delta^{-2}F]^+)$ , il vient :

$$\int_{\Omega} |D^2\hat{U}|^2 d\Omega \leq \|[\psi - \Delta^{-2}F]^+\|_{L^\infty} \|D^2\phi_1\|_{L^2} \|D^2\hat{U}\|_{L^2}$$

c'est à dire

$$\|D^2\hat{U}\|_{L^2} \leq \|[\psi - \Delta^{-2}F]^+\|_{L^\infty} \|D^2\phi_1\|_{L^2}.$$

Par le choix  $K = K_0$ , dérive la majoration voulue :

$$\hat{\mu}(\Omega) = \hat{\mu}(K) \leq \|D^2\phi_1\|_{L^2} \|D^2\phi_2\|_{L^2} \|\psi - \Delta^{-2}F\|_{L^\infty}^+. \quad (3.20)$$

◆

Nous rappelons la proposition suivante dont la preuve courte due à [3] se fait dans le même esprit que celle de [82] du Théorème 2.3.6 comparant à la 1-capacité la réaction du problème d'obstacle pour la membrane, mais pour cela nous faisons appel au Théorème 3.2.2 ci-dessus qui lui est technique.

**Proposition 3.2.2** Avec les notations de la proposition 3.1.1, dans le problème (3.4),  $\hat{\mu}$  et  $\hat{U}$  sont reliés par  $\hat{\mu} = \Delta^2 \hat{U}$ . Soient  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\hat{\psi} \in C^2(\bar{\Omega})$ , avec  $\hat{\psi} < 0$  sur  $\partial\Omega$  puis  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Alors pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $C > 0$  tel que :

$$\hat{\mu}(K) \leq C \sqrt{\text{Cap}_1(K) [\|\Delta \hat{\psi}\|_{L^\infty} \hat{\mu}(\Omega)]}.$$

**Preuve** ◆ Observons que pour  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  tel que  $\phi \geq 1$  sur  $K$

$$\hat{\mu}(K) \leq \int_{\Omega} \phi d\hat{\mu} = \int_{\Omega} \phi(\Delta^2 \hat{U}) d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \Delta \hat{U} d\Omega$$

$$\hat{\mu}(K) \leq \sqrt{\|\nabla \phi\|_{L^2} \|\nabla \Delta \hat{U}\|_{L^2}}$$

d'où

$$\hat{\mu}(K) \leq \sqrt{\text{Cap}_1(K) \|\nabla \Delta \hat{U}\|_{L^2}}$$

Or

$$\int_{\Omega} |\nabla \Delta \hat{U}|^2 d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta \hat{U} d\hat{\mu} \leq \|[-\Delta \hat{\psi}]^+\|_{L^\infty} \hat{\mu}(\Omega). \quad (3.21)$$

L'inégalité (3.21) provient de la majoration  $\Delta \hat{U} \geq \Delta \hat{\psi}$  sur  $\text{Supp}(\hat{\mu})$  du Théorème 3.2.2. ◆

**Commentaires 3.2.1** D'après la Remarque (3.2.1), la Proposition (3.2.2) se traduit pour (3.2) sous la forme :

$$\mu(F)(K) \leq C \sqrt{\text{Cap}_1(K) [\|\Delta \psi - \Delta^{-2}F\|_{L^\infty} \mu(F)(\Omega)]}. \quad (3.22)$$

En particulier, si  $\text{Cap}_1(E) = 0$  alors  $\mu(E) = 0$ , et donc si  $\text{Cap}_1(\mathcal{I}(F)) = 0$ , alors  $\Delta^2 U = F$  sur  $\Omega$ . Nous en déduisons que la zone de contact est définie à un ensemble de 1-capacité nulle près, en particulier comme la 1-capacité d'un singleton (dans un ouvert du plan) est nulle il ne peut pas être chargé par  $\mu(F)$ , ce que nous reverrons plus loin...

### 3.2.3 L'affaire de la réaction ponctuelle ...

Dans son *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*<sup>3</sup> le mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson fut le premier à exposer les solutions d'équilibre d'une plaque circulaire linéairement élastique, encastrée sur son bord  $r = R$ , soumise respectivement à une force  $F_0$  uniforme, et à une force concentrée en son centre  $p_0\delta_0$ . Il obtint respectivement les expressions suivantes du champ de déplacement vertical

$$U(r) = \frac{F_0}{64D}(R^2 - r^2)^2,$$

et

$$U(r) = \frac{p_0}{8\pi D} \left( \frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right).$$

Nous pouvons d'ores et déjà souligner que la solution associée à la masse de Dirac n'est pas de classe  $C^2(\Omega)$ . Imaginons que nous placions au dessous de cette plaque circulaire un obstacle plan  $\psi = -1$  et que la plaque touche cet obstacle au point central  $(0,0)$ . Nous sommes portés à croire que si le champ de forces uniforme  $F_0$  est assez intense il apparaîtrait une réaction localisée en  $(0,0)$ . Or par le principe de superposition nous déduisons que la solution correspondante serait alors de la forme

$$U(r) = \frac{F_0}{64D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{p_0}{8\pi D} \left( \frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right).$$

Mais alors sachant d'après le théorème de Schild 3.2.4 que  $U$  est de classe  $C^2(\Omega)$ , nous obtenons une contradiction avec la présence d'une réaction ponctuelle !

Il s'agit en fait d'une situation générale, que nous énonçons ci-dessous comme corollaire du théorème 3.2.4.

**Proposition 3.2.3** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert connexe borné,  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ , alors la mesure associée à la solution de (3.2) n'a pas de partie atomique.

**Preuve :** ♦ Nous savons que les solutions fondamentales  $SF_{\Delta^2}$  de l'opérateur bilaplacien dans le plan  $\mathbb{R}^2$  sont de la forme

$$SF_{\Delta^2}(x, b, d) := \frac{\|x\|^2}{8\pi} (\ln \|x\| - 1) + b\|x\|^2 + d; \quad b, d \in \mathbb{R}.$$

Introduisons la solution du problème aux limites linéaire :

$$\Delta^2 W = 0 \text{ dans } \Omega, \quad W(x) = SF_{\Delta^2}(x, b, d), \quad \partial_\nu W(x) = SF_{\Delta^2}(x, b, d) \text{ sur } \partial\Omega.$$

Nous voyons que  $W$  est  $C^2$  (en fait  $C^\infty$ ) sauf en 0. Supposons que la plaque fléchisse sous le chargement  $F$  en touchant l'obstacle  $\psi$  en un point isolé  $x^0$  et que la réaction soit non-nulle, alors l'équilibre local s'écrit

$$\Delta^2 U = F + p_0\delta_{x^0}$$

grâce au principe de superposition la solution est alors somme de la solution bilatérale en  $F$  qui est  $\mathbb{H}^4(\Omega)$  plus  $p_0 W(x)$  qui n'est pas  $C^2$  alors que d'après le théorème de Schild 3.2.4 que  $U$  est de classe  $C^2(\Omega)$ . Contradiction donc conclusion. ♦

<sup>3</sup>Mém. Acad. Roy. Sci. Inst. France 8, 357-570, (1829)

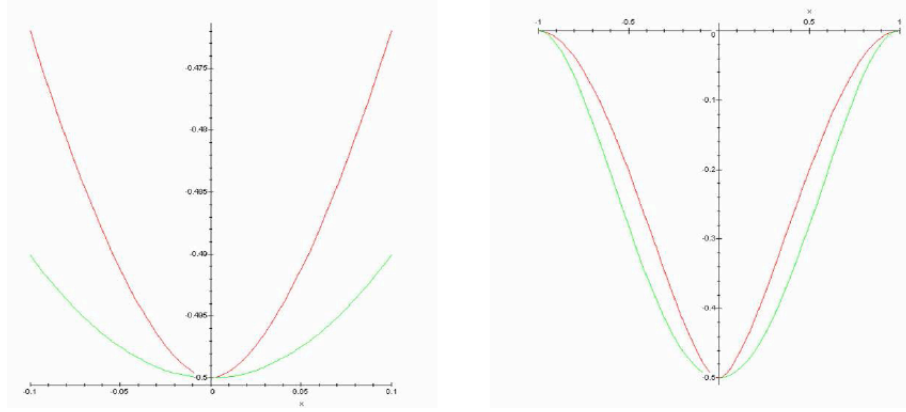


FIG. 3.1 – Graphes des solutions de Poisson

### 3.2.4 Régularité de $U$ au voisinage de $\partial\Omega$

Du point de vue mécanique il nous est apparu intéressant d'affaiblir l'hypothèse  $\partial\Omega \in C^\infty$  ou  $\partial\Omega \in C^{4,\alpha}$  pour obtenir la régularité  $U \in C^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^3(\Omega)$ . Nous traitons le cas d'une plaque encastree grâce aux théorèmes de Grisvard. Le cas d'une plaque en appui simple sur une partie de son bord s'en déduit *mutatis mutandis*.

Puisque  $U \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , par les théorèmes d'injections de Sobolev classiques, il vient que  $U \in C^0(\overline{\Omega})$ , si  $\dim \Omega \leq 3$ . Or comme nous imposons que  $U > \psi$  sur  $\partial\Omega$ , ( $\Gamma_3 = \emptyset$ ), par continuité il vient que  $U > \psi$  sur  $\mathcal{V}_\epsilon$ , un  $\epsilon$ - $\Omega$ -voisinage de  $\partial\Omega$ . Ainsi

$$\Delta^2 U = F \quad \text{sur } \mathcal{V}_\epsilon \quad \text{et } U \in \mathbb{K}_\psi.$$

De plus, grâce à la théorie standard des opérateurs elliptiques, ceci implique que  $U$  est aussi « régulier » dans  $\overline{\mathcal{V}_\epsilon}$  que le permettent les données  $\partial\Omega$ ,  $F$ ,  $\psi$ , plus précisément :

**Théorème 3.2.6** Soient  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  et  $\partial\mathcal{V}_\epsilon$  de classe  $C^{4,\alpha}$ , alors  $U \in \mathbb{H}^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ . Si de plus  $\partial\mathcal{V}_\epsilon$  est de classe  $C^{k,\alpha}$ ,  $k \geq 4$  et  $0 < \alpha < 1$ , alors  $U \in C^{k,\alpha}(\overline{\mathcal{V}_\epsilon})$ .

Nous pouvons affaiblir les hypothèses sur la régularité du bord du domaine  $\Omega$  puisque la plaque ne touche pas l'obstacle sur  $\mathcal{V}_\epsilon$ , grâce aux théorèmes de P. Grisvard sur un ouvert polygonal à coins convexes ([73], p. 326), que nous rappelons ci-dessous.

**Théorème 3.2.7** Soit  $\Omega$  un domaine à coins convexes tel que  $\partial\Omega$  soit de classe  $C^{4,\alpha}$  par morceaux,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ . Alors comme la solution de (3.2) vérifie  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$  nous avons

$$U \in \mathbb{H}^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}).$$

**Preuve :** ♦ Désignons par  $\partial_{int}\mathcal{V}_\epsilon$  le bord intérieur de  $\mathcal{V}_\epsilon$ , son bord extérieur étant  $\partial\Omega$ . Supposons que  $\partial_{int}\mathcal{V}_\epsilon$  lisse, alors que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^{4,\alpha}_{mex}$ . Introduisons une fonction  $G_\epsilon \in C^2(\partial_{int}\mathcal{V}_\epsilon)$ , avec  $G_\epsilon > \psi$  sur  $\partial_{int}\mathcal{V}_\epsilon$  et notons  $u_{ext}$  l'unique solution du problème :



$$\begin{cases} \Delta^2 u_{ext} = F & \text{sur } \mathcal{V}_\epsilon \\ u_{ext} = G_\epsilon & \text{sur } \partial_{int} \mathcal{V}_\epsilon \\ \partial_n u_{ext} = \partial_n G_\epsilon & \text{sur } \partial_{int} \mathcal{V}_\epsilon \end{cases} \quad (3.23)$$

Ce problème aux limites rentre dans le cadre d'application du Théorème suivant :

**Théorème 3.2.8** [73]

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal à coins convexes avec  $\partial\Omega := \coprod_{0 \leq i \leq p} \Gamma_i$ . Soient  $F \in \mathbb{H}^k(\Omega)$ ,  $G_i \in \mathbb{H}^{7/2+k}(\Gamma_i)$  et  $H_i \in \mathbb{H}^{5/2+k}(\Gamma_i)$ , avec  $k \geq 0$ . Supposons que  $U \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  soit solution de

$$\begin{cases} \Delta^2 U = F & \text{sur } \Omega \\ U = G_i & \text{sur } \Gamma_i \\ \partial_n U = H_i & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (3.24)$$

Alors  $U \in \mathbb{H}^{4+k}(\Omega)$ . Il faut de plus ajouter qu'on peut affaiblir cet énoncé en supposant seulement les  $\Gamma_i \in C^{4+k}$ .

Nous savons que  $u_{ext} \in C^2$  sur  $\mathcal{V}_\epsilon$ , pour tout  $F_\epsilon \in L^2(\Omega)$  d'après le théorème 3.2.8 et  $u_{ext} = U$  sur  $\overline{\Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon}$ , avec  $G_\epsilon = U$ .

Soit, à présent,  $u_{int}$  l'unique solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_{int} = F_\epsilon + \mu(F) & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon \\ u_{int} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (u_{int} - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon \\ \partial_n u_{int} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_{int} = G_\epsilon & \text{sur } \partial_{int} \mathcal{V}_\epsilon \\ \partial_n u_{int} = \partial_n G_\epsilon & \text{sur } \partial_{int} \mathcal{V}_\epsilon \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous déduisons du Théorème 3.2.4, que  $u_{int} \in C^2$  sur  $\overline{\Omega \setminus \mathcal{V}_\epsilon}$  pour tout  $F_\epsilon \in L^2(\Omega)$ . Nous pouvons choisir  $F_\epsilon$  pour que  $u_{int} = U$ . Puisque la solution  $U$  est unique alors il vient comme annoncé que  $U \in C^2(\overline{\Omega})$  si  $\Omega$  est à coins convexes. ♦

### 3.3 Formulation forte

Comme toujours dans les problèmes à frontières libres, il est difficile de travailler sur la formulation forte associée, puisque celle-ci présuppose que l'on connaisse un minimum d'informations sur une des inconnues du problème : la frontière libre, sur laquelle la solution est sensée vérifier certaines relations.

**Théorème 3.3.1** (équations d'Euler-Lagrange) Soient un domaine du plan  $\Omega$  à bord  $C^2$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ . Alors la solution  $U$  de (3.2) vérifie :

$$\begin{cases} \Delta^2 U = F & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{I}(F) \\ U = \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ DU = D\psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F) \\ \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ D^2 U \in C^0(\overline{\Omega}) \end{cases} \quad (3.26)$$

**Preuve** ♦ Comme  $U$  et  $\psi$  sont continues sur  $\Omega$ , l'ensemble  $[U > \psi] = \Omega \setminus \mathcal{I}(F)$  est ouvert. On sait que la mesure  $\mu(F)$  est de masse totale finie et que son support est contenu dans  $\mathcal{I}(F)$ , ceci assure que  $\Delta^2 U = F$  dans  $[U > \psi]$ . Enfin puisque  $U \geq \psi$  dans  $\overline{\Omega}$  et  $U \in C^1(\overline{\Omega})$  alors  $DU = D\psi$  sur  $\partial\mathcal{I}(F)$ . ♦

**Commentaires 3.3.1** *Puisque la solution  $U$  de (3.2), est de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ , il est clair que si la zone de contact est un parfait<sup>4</sup> non vide et est suffisamment régulière, alors il y a raccord des tangentes dans la direction normale  $n$  à la frontière libre*

$$\partial_n U(X) = \partial_n \psi(X) \text{ pour tout } X \in \partial\mathcal{I}(F),$$

*mais aussi le raccord des courbures dans la direction  $n$*

$$\partial_n^2 U(X) = \partial_n^2 \psi(X) \text{ pour tout } X \in \partial\mathcal{I}(F).$$

### 3.4 Topologie et Géométrie de l'ensemble de coïncidence

Nous aimerions comprendre ici, comme nous l'avons fait au Chapitre I, comment apparaissent les éventuelles singularités sur la zone de contact entre la plaque et l'obstacle. Il s'avère que cette question est très difficile est largement ouverte, alors nous nous bornons à énoncer quelques propositions et commentaires, qui nous serviront par la suite.

Comme pour le cas du problème d'obstacle (2.2), aucune régularité ne peut être espérée en général sur la frontière libre  $\partial\mathcal{I}$ . Avec le même type d'arguments que ceux présentés au Chapitre II, on peut montrer que la zone de contact peut-être égale à n'importe quel compact de  $\mathbb{R}^2$  ! Aussi une hypothèse minimale pour espérer de la régularité sur  $\partial\mathcal{I}$  est la suivante :

$$\textbf{Hypothèse de non-dégénérescence : } \Delta^2 \psi - F > \delta_0 > 0. \quad (3.27)$$

**Remarque 3.4.1** Sous la condition  $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ , ou plus faiblement  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ , l'ensemble de coïncidence n'a pas de points intérieurs si  $\Delta^2 \psi - F < 0$ . En effet, sinon d'une part  $\Delta^2 U - \Delta^2 \psi < 0$  sur un ouvert et d'autre part  $\Delta^2 U \geq F \geq 0$  sur  $\Omega$ , ce qui est absurde.

#### 3.4.1 Connexité de $\mathcal{N}$

Nous présentons une variante d'un théorème de [30], qui nous permettra dans la suite d'illustrer le comportement de la zone de contact sous un chargement variable.

**Théorème 3.4.1** *Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan à bord  $C^{2,\alpha}$ ,  $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ , et  $F \in L^2(\Omega)$ . Soit  $U$  la solution de (3.2), avec  $U > \psi$  sur  $\partial\Omega$ . Alors sous l'hypothèse*

$$\Delta^2 \psi - F \geq 0 \text{ sur } \Omega$$

*l'ensemble  $\mathcal{N} := \{U > \psi\}$  est un ouvert connexe.*

<sup>4</sup>i.e.  $\mathcal{I}(F) = \overline{\mathcal{I}(F)}$

---

**Corollaire 3.4.1** *Il en découle que les composantes connexes de  $\mathcal{I}$  sont simplement connexes.*

**Preuve**     ♦ Le Théorème ci-dessus est une conséquence directe du Lemme suivant :

**Lemme 3.4.1** *Soit  $K$  une composante connexe de  $\mathcal{N}$ . Alors  $\partial K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ .*

En effet de la continuité de  $U$  et puisque  $U > \psi$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{N}$  contient un  $\Omega$ -voisinage du bord  $\partial\Omega$  ; grâce au Lemme (3.4.1), les bords des composantes connexes de  $\mathcal{N}$  intersectent le connexe  $\partial\Omega$ , d'où le résultat.

**Preuve du Lemme 3.4.1** Supposons par l'absurde qu'il soit faux. Dans ce cas les points de  $\partial K$  appartiennent au support de  $\mu(F)$ . Or nous savons, grâce au théorème 3.2.2, que sur  $\text{supp}(\mu(F))$ ,  $\Delta U \geq \Delta\psi$ , du coup

$$\Delta U \geq \Delta\psi \text{ sur } \partial K.$$

Comme nous avons également

$$\Delta(\Delta U - \Delta\psi) = F - \Delta^2\psi \leq 0 \text{ sur } K,$$

nous pouvons en déduire, par le théorème 3.2.4 que  $U \in C^2(\overline{\Omega})$  et par le principe du maximum, que

$$\Delta U \geq \Delta\psi \text{ sur } K.$$

C'est à dire  $\Delta(U - \psi) \geq 0$  sur  $K$  et puisque  $U - \psi = 0$  sur  $K$ , par le principe du maximum il vient  $U - \psi \leq 0$  sur  $K$ , ce qui est absurde et démontre le Lemme 3.4.1. ♦

### 3.4.2 Sur la géométrie de la frontière libre

Rappelons que d'après le Théorème 3.2.2, pour tout point  $X^o \in \partial\mathcal{I}$ ,  $\Delta U(X^o) \geq \Delta\psi(X^o)$ . Le Théorème suivant affirme que lorsque la courbure de la plaque et de l'obstacle sont différentes cela interdit « la dégénérescence » des parties d'intérieur vide de la zone de contact.

**Théorème 3.4.2** [30] *Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan à bord  $C^{2,\alpha}$ ,  $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ , et  $F \in L^2(\Omega)$ . Soit  $U$  la solution de (3.2). Supposons que pour un point  $X^o \in \partial\mathcal{I}$  de la frontière libre on ait :*

$$\Delta U(X^o) > \Delta\psi(X^o) \tag{3.28}$$

*Alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}(X^o)$  du point  $X^o$  tel que  $\partial\mathcal{I}(F) \cap \mathcal{V}(X^o)$  soit contenu dans une courbe de classe  $C^1$ .*

**Idée de la Preuve :** ♦ Nous résumons la preuve de L. Caffarelli et A. Friedman [30]. Quitte à effectuer un changement de variables, nous pouvons poser  $F = 0$ . Choisissons un ouvert  $\mathcal{V}(X^o) = \mathcal{V}$  tel que  $X^o \in \partial\mathcal{I} \cap \mathcal{V}$ ,  $\Delta U > \Delta\psi$  sur  $\mathcal{V}$ .

- On montre que  $X^o$  ne peut être approché sur le bord libre que suivant une seule direction  $\xi(X^o) = \xi^o$  (i.e une seule direction tangente à l'ordre 2).

En effet s'il en existe deux  $\xi, \xi'$  alors

$$\partial_\xi^2(U - \psi) = 0, \quad \partial_{\xi'}^2(U - \psi) = 0 \text{ en } X^o.$$

Or  $U - \psi \geq 0$  et  $(U - \psi)(X^o) = 0$ ,  $\nabla(U - \psi) = 0$  il vient que  $\partial_{\xi''}^2(U - \psi) = 0$  pour tout vecteur  $\xi''$ . Et donc en particulier  $\Delta(U - \psi)(X^o) = 0$ , ce qui est absurde.

- Posons  $X^o = (0, 0)$  et  $\xi^o =$  l'axe  $y$ . Pour tout vecteur  $\alpha$  tel que  $|\alpha|$  soit assez petite, on montre que la ligne  $y = \alpha$  intersecte  $\partial\mathcal{I} \cap \mathcal{V}$  en au plus un point. Ce qui assure que  $\partial\mathcal{I} \cap \mathcal{V}$  est un graphe  $x = \phi(y)$  avec  $y \in ] - |\alpha|, |\alpha| [$ .

- De la continuité uniforme de  $U$  sur tout compact de  $\Omega$ , et de la définition de  $\xi^o$ , on déduit que  $\phi$  est une fonction lipschitzienne.

- Enfin on partitionne  $] - |\alpha|, |\alpha| [$  en  $m$  intervalles qui contiennent chacun un point de  $\partial\mathcal{I} \cap \mathcal{V}$ , si de tels points existent. Nous pouvons ainsi connecter deux points adjacents  $X^1, X^2$  par un arc de parabole  $C^1$ , tel que les tangentes en  $X^1, X^2$  coïncident avec  $\xi(X^1), \xi(X^2)$ , respectivement. Désignons cette courbe par  $\phi_m : x \mapsto \phi_m(y)$ . En appliquant le Théorème d'Arzéla-Ascoli à la famille  $(\phi_m)_m$ , il découle que  $\phi$  peut être étendue en une fonction  $\bar{\phi} \in C^1$ . Ce qui termine la preuve. ♦

La tranformation de L'hodographe, présentée au Chapitre II, peut être écrite (modulo certaines restrictions) pour un point de la frontière libre de (3.2). C'est ce qu'illustre le Théorème de régularité ci-dessous, prouvé dans [82] (Theorem 5.4. page 208-212), à l'aide de la définition suivante.

**Définition 3.4.1** Soit  $\mathcal{I}$  la zone de contact du problème (3.2). Un point  $X_o \in \mathcal{I}$  est  $C^k$ -régulier, si la frontière libre est localement le graphe d'une fonction  $\chi$  de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$  :

$$\partial\mathcal{I} \cap \mathbb{B}(X_o, r) = \{X = (x_1, x_2) \in \Omega \mid x_2 = \chi(x_1)\}.$$

Un point est dit singulier s'il n'est pas régulier.

**Théorème 3.4.3** Soit  $\Omega$  est domaine borné du plan avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$ ,  $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  et  $\psi < 0 = G$  sur  $\partial\Omega$ . Soit  $U$  une solution du problème (3.2) avec  $F \in C^\infty$  dans un voisinage  $\mathbb{B}(X^o, r)$ , d'un point régulier (au sens de la définition 3.4.1)  $X^o$  de la frontière libre, avec  $U \in C^4(\mathbb{B}(X_o, r))$ . Supposons également que

$$DU = 0, \quad D^2U = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{I}(F) \cap \mathbb{B}(X_o, r), \text{ et } \frac{\partial^3 U}{\partial n^3}(X^o) > 0$$

alors dans le voisinage  $\mathbb{B}(X^o, r)$  la frontière libre est de classe  $C^\infty$ .

**Remarque 3.4.2** Avec ce théorème il apparaît que, en dehors des points singuliers, plus régulières sont les données plus régulière est la frontière libre bordant les parties d'intérieur non-vide de  $\mathcal{I}(F)$ . Précisons que l'hypothèse  $\frac{\partial^3 U}{\partial n^3}(X^o) > 0$  traduit le décollement franc de la

plaque au voisinage du point  $X^o$ . Elle peut-être assurée dès que nous supposons l'hypothèse de non-dégénérescence

$$\Delta^2\psi - F \geq \delta_0 > 0, \quad \partial_n^4\psi - F \geq \delta_1 > 0 \text{ sur } \mathbb{B}(X^o, r).$$

Nous montrerons ce dernier point plus loin (c.f. Théorème 3.6.4).

Enfin L. Caffarelli et A. Friedman ont établi dans [30], que si l'hypothèse (3.27) est violée en un point de la frontière libre bordant une partie d'intérieur non-vide de  $\mathcal{I}(F)$  celui-ci est singulier.

**Théorème 3.4.4** *Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan à bord  $C^{2,\alpha}$ ,  $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ , et  $\hat{U}$  une solution du problème (3.4) Soit  $X^o \in \partial\mathcal{I}$ , avec  $\Delta\hat{\psi}(X^o) < 0$ . Supposons que  $\Delta(\hat{U} - \hat{\psi}) = 0$  sur  $\partial\mathcal{I} \cap \mathcal{V}(X^o)$ , où  $\mathcal{V}(X^o)$  est un voisinage du point  $X^o$ . Soit  $\mathcal{N}^o$  une composante connexe de  $\mathcal{N} := \{\hat{U} > \hat{\psi}\}$  et soit  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux courbes de  $\partial\mathcal{N}^o$  qui se coupent en  $X^o$ , faisant un angle  $\theta^o$  en  $X^o$ . Alors  $\theta^o \geq \frac{\pi}{2}$ .*

**Remarque 3.4.3** L'absence de principe du maximum ne nous a pas permis d'étudier plus avant la géométrie de la frontière libre de (3.2). Cependant les observations ci-dessous nous ont conduit à formuler dans [104] la conjecture suivante :

*Dans problème de l'obstacle pour une plaque linéaire encastrée en flexion (3.2), la frontière libre bordant une partie d'intérieur non-vide de  $\mathcal{I}(F)$  est localement de mesure de Hausdorff finie si la condition de non-dégénérescence :  $\Delta^2\psi - F \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}(F)$ , pour  $\psi$ ,  $F$  et  $\Omega$  suffisamment réguliers.*

D'autre part, nous savons que l'hypothèse  $\Delta U > \Delta\psi$  en les points de la frontière bordant les parties d'intérieur vide, assure bien que la frontière libre est « localement non-fractale ». Des discussions avec R. Monneau s'est dégagé que l'extension de la notion de blow-up (vue au Chapitre I) au problème (3.27) n'est pas immédiate, mais est nécessaire pour pouvoir établir une formule de monotonie dans l'esprit de celles données par G. Weiss. La condition de décollement franc semble jouer un rôle capital dans la possibilité de pouvoir établir un critère d'extrême finesse comme celui donné au Théorème (2.5.7).

### 3.5 Stabilité au sens d'Adams pour le bilaplacien

D. Adams [3], s'est intéressé à la stabilité par perturbations pour les problèmes d'obstacle avec des opérateurs polyharmoniques ( $\Delta^m$ ) posés dans un domaine borné de l'espace Euclidien en dimension finie. Nous exposons ici un théorème de stabilité topologique pour (3.4) relativement à une suite d'obstacles  $(\psi_n)_n$ . Bien que ce résultat soit en un certain sens optimal, il est obtenu sous des hypothèses peu maniables et dont le sens mécanique et peu clair. Nous proposons une nouvelle version de ce théorème de stabilité pour (3.2) mais en faisant des hypothèses relativement aux forces, qui sont plus satisfaisantes d'un point de vue mécanique.

Nous imposons toujours à l'obstacle  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  et  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , et nous notons dans la suite  $\hat{U}(\psi)$ , ou plus simplement  $\hat{U}$  quand il n'y a pas de confusion à craindre, la solution pour tout  $\psi$  du problème (3.4). Par la définition de la réaction  $\hat{\mu} := \Delta^2\hat{U}$  nous déduisons l'inégalité suivante, qui est à la base de ce qui va être établi dans ce paragraphe :

---


$$\int_{\Omega} |\Delta(\hat{U} - \hat{U}_n)|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} (\psi - \psi_n) d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n) \quad (3.29)$$

où nous notons  $\hat{U}_n := \hat{U}(\psi_n)$  la solution associée à  $\psi_n$ .

Il vient de (3.29) que  $\hat{U}_n \rightarrow \hat{U}$  fortement dans  $\mathbb{H}^2$  quand  $\psi_n \rightarrow \psi$  uniformément pourvu que l'on contrôle  $\hat{\mu}_n(\Omega)$  et  $\hat{\mu}(\Omega)$ . Le but poursuivi par D. Adams fut de trouver quelles notions de convergence sur les obstacles garantissent les convergences les plus fortes sur les solutions. Il est présenté dans [4] des résultats plus fins, selon une approche bien plus technique et complètement différente basée sur la notion d'intégrale de Choquet au sens de la capacité  $\text{Cap}_2$ . Ils concluent qu'un critère de stabilité ne dépend pas tant du mode de convergence en norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{\alpha,p}(\Omega)}$ , que de la nature de l'ensemble de coïncidence, ce qui apparaît dans les conditions de convergence données dans [4] sous la forme d'une condition de contact à l'ordre deux (raccord des courbures) entre la solution limite et la limite des obstacles (Théorème 2, page 7). Ces observations nous ont incité à étudier plus avant la stabilité de la zone de contact, comme nous le verrons plus loin.

### 3.5.1 Stabilité $\mathbb{H}_{loc}^3$ pour (3.4)

Nous renvoyons le lecteur à [3], pour la preuve du théorème suivant.

**Théorème 3.5.1** *Soient  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$ , et soient  $(\psi_n)_n \in C^2(\overline{\Omega})$  une suite d'obstacles telle que  $\psi_n < 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\|\psi_n\|_{L^\infty}$  et  $\|\Delta\psi_n\|_{L^\infty}$  soient uniformément bornés. Soient  $\hat{U}_n$  la solution de (3.4) associée à  $\psi_n$ . Supposons que  $\hat{U}_n \xrightarrow{\mathbb{H}^2} \hat{U}$  et que*

$$x \mapsto B_n(x) := \sup_n \{\|D^3 \hat{U}_n(x)\|\} \in L_{loc}^2(\Omega), \quad (3.30)$$

alors

$$\hat{U}_n \xrightarrow{\mathbb{H}_{loc}^3} \hat{U}.$$

L'hypothèse d'intégrabilité uniforme (3.30) étant mécaniquement peu parlante, ceci qui nous a poussé à chercher une forme plus élégante quoique moins générale.

### 3.5.2 Continuité au sens de la norme $\mathbb{H}^3$

Notre lecture des résultats d'Adams nous a incité à prouver le théorème de stabilité suivant, qui affirme la  $\mathbb{H}^3$ -continuité de la solution de (3.2) par rapport au chargement.

**Théorème 3.5.2** Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  à coins convexes tel que  $\partial\Omega$  soit de classe  $C^{4,\alpha}$  par morceaux,  $\psi \in C^2(\Omega)$ . Soient  $U_n$  la solution de (3.2) associée à  $F_n \in L^2(\Omega)$ . Supposons que la suite  $(F_n)_n$  converge vers  $F$  en dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$U_n \longrightarrow U \text{ dans } \mathbb{H}^3(\Omega),$$

et donc

$$\mu(F_n) \longrightarrow \mu(F) \text{ dans } \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

où  $U$  (respectivement  $U_n$ ) est la solution de (3.2) associée à  $F$  (respectivement  $F_n$ ).

**Preuve** ♦ Comme à la Remarque (3.2.1) introduisons la solution bilatérale associée à (3.2) et  $F$  (resp.  $F_n$ ), notée  $U^b := \Delta^{-2}(F)$  (resp.  $U_n^b := \Delta^{-2}(F_n)$ ). Procédons au changement d'inconnue :

$$U := U^b + \hat{U}, \quad U_n := U_n^b + \hat{U}_n.$$

Le théorème de Lions-Stampacchia fournit  $\bar{U} \in \mathbb{K}_{\psi-U^b} := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi - U^b\}$  unique tel que :

$$\forall V \in \mathbb{K}_{\psi-U^b}, \quad \int_{\Omega} \Delta \hat{U} \Delta(V - \hat{U}) d\Omega \geq 0, \quad (3.31)$$

Puisque  $\hat{U}_n \geq \psi - U_n^b$  et  $\hat{U} \geq \psi - U^b$  sur  $\Omega$ , nous avons

$$\int_{\Omega} |\Delta(\hat{U} - \hat{U}_n)|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} (U_n^b - U^b) d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n).$$

Il vient que

$$\|\hat{U} - \hat{U}_n\|_{\mathbb{H}^2} \longrightarrow 0, \quad (3.32)$$

pourvu que la masse totale de la mesure  $\hat{\mu}_n$  soit bornée indépendamment de  $n$ . Pour voir cela, considérons  $K_0 \subset \Omega$  tel que  $\psi - U_n^b < 0$  sur  $\Omega \setminus K_0$ , ainsi  $\text{supp}(\hat{\mu}_n) \subset K_0$ . De plus pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe alors  $\phi$  une fonction plateau<sup>5</sup> de  $K$  permettant d'écrire

$$\hat{\mu}_n(K) \leq \int_{\Omega} \phi d\hat{\mu}_n \leq \|\phi\|_{L^2} \|\hat{U}_n\|_{L^2}.$$

Or

$$\int_{\Omega} |\Delta \hat{U}_n|^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\psi - \hat{U}_n^b) d\Omega \leq \|[\psi - U_n^b]^+\|_{L^\infty} \hat{\mu}_n(\text{supp}([\psi - U_n^b]^+)).$$

En faisant le choix  $K = K_0$  puis  $K = \text{supp}([\psi - \hat{U}_n^b]^+)$ , il existe  $\phi_0$  et  $\phi_1$  qui permettent d'obtenir la majoration voulue :

$$\hat{\mu}_n(K) \leq \int_{\Omega} \phi d\hat{\mu}_n \leq \|\phi_0\|_{L^2} \|\phi_1\|_{L^2} \|[\psi - U_n^b]^+\|_{L^\infty}.$$

Grâce à l'inégalité (3.21) établi à la fin de la preuve de la Proposition (3.2.2) nous déduisons :

$$\|\hat{U}_n\|_{\mathbb{H}^3} \leq \|U_n^b\|_{\mathbb{H}^2} + \sqrt{\|\Delta(\psi - U_n^b)\|_{L^\infty} \hat{\mu}_n(\Omega)}.$$

---

<sup>5</sup>  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  avec  $\phi \equiv 1$  sur  $K$

Comme  $F_n$  converge vers  $F$  alors  $U_n^\flat$  est bornée indépendamment de  $n$  en norme  $\mathbb{H}^3$ , nous savons en plus que la masse totale de la mesure  $\hat{\mu}_n$  est bornée indépendamment de  $n$  (ceci remplace donc l'hypothèse (3.30) du Théorème d'Adams.). Il s'en suit que l'on peut extraire une sous-suite de  $\hat{U}_n$  convergeant faiblement dans  $\mathbb{H}^3$ . Or grâce à (3.32) cette limite faible n'est autre que  $\hat{U}$ . Sachant qu'une suite à valeur dans un espace métrique compact ayant une seule valeur d'adhérence est convergente, en vertu du théorème de métrisabilité des boules d'espaces de Banach séparables<sup>6</sup> c'est toute la suite  $\hat{U}_n$  qui converge vers  $\hat{U}$ , toujours grâce à (3.32). A partir de maintenant la preuve suit quasiment, à quelques détails et points techniques près, celle donnée dans [3].)

Ayant montré la convergence faible dans  $\mathbb{H}^3$ , montrons la convergence forte. Pour ce faire nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.5.1** *Avec les hypothèses et notations du Théorème 3.5.2, si  $\hat{U}_n \rightarrow \hat{U}$  dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ , alors  $\Delta(\hat{U}_n - \hat{U}) \rightarrow 0$  Cap<sub>1</sub>-qp sur  $\Omega$ .*

La preuve de ce lemme se déduit à partir de la formule suivante :

**Lemme 3.5.2** *Avec les hypothèses et notations du Théorème 3.5.2, pour  $u, v \in C^2(\Omega)$ , fixés  $\mathbb{B}(X_0, t) \subset \Omega$ , il existe une constante  $A > 0$  indépendante de  $u, v, t$  telle que*

$$\begin{aligned} |\nabla \partial_i u(X_0) - \nabla \partial_i v(X_0)| &\leq A \int_{\mathbb{B}(X_0, t)} \frac{|\nabla \partial_i u(X) - \nabla \partial_i v(X)|}{|X_0 - X|} dX \\ &\quad + A \int_{\mathbb{B}(X_0, t)} \frac{|D^3 v(X)|}{|X_0 - X|} dX \\ &\quad + A \int_{\mathbb{B}(X_0, t)} \frac{|D^3 u(X)|}{|X_0 - X|} dX \end{aligned} \quad (3.33)$$

La preuve de cette formule est donnée dans [3] Lemma 1, pages 5-6.

Posons  $u = \hat{U}$  et  $v := \hat{U}_n$ , nous voulons montrer que

$$\int_{\mathbb{B}(X_0, t)} \frac{|D^3 \hat{U}(X)|}{|X_0 - X|} dX, \text{ et } \int_{\mathbb{B}(X_0, t)} \frac{|D^3 \hat{U}_n(X)|}{|X_0 - X|} dX \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ Cap}_1\text{-qp sur } \Omega$$

et que

$$\int_{\mathbb{B}(X_0, t)} \frac{|\nabla \partial_i \hat{U}(X) - \nabla \partial_i \hat{U}_n(X)|}{|X_0 - X|} dX \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ Cap}_1\text{-qp sur } \Omega.$$

Il suffit pour cela d'appliquer le lemme suivant, dont la preuve est donnée dans [3] Lemma 2, pages 6-8.

**Lemme 3.5.3** *Soit  $B \subset \Omega$  bornée, et  $(s_n)_n$  suite de  $L^2(B)$  telle que*

1.  $s_n \xrightarrow{L^2(B)} 0$
2.  $\exists s \in L^2(B) / |s_n| \leq s \text{ sur } B, \forall n.$

---

<sup>6</sup>**Théorème** [25] Dans tout espace de Banach séparable la boule unité est métrisable pour la topologie faible.



Alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{s_n(y)}{|x-y|} \mathbf{1}_B(x) dy, \quad \text{Cap}_1\text{-qp tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.5.1.

Pour finir la démonstration de la convergence forte, fixons  $\phi \in C_0^\infty(K)$  où  $K \subset \Omega$ , nous pouvons écrire que

$$\int_{\Omega} |\nabla \Delta(\hat{U}_n - \hat{U})|^2 \phi^2 d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta(\hat{U}_n - \hat{U}) \phi^2 d(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}).$$

Grâce à l'inégalité de Young, nous avons l'existence de  $A > 0$  tel que :

$$\int_{\Omega} |\nabla \Delta(\hat{U}_n - \hat{U})|^2 \phi^2 d\Omega \leq A \int_K |\Delta(\hat{U}_n - \hat{U})|^2 d(\hat{\mu}_n + \hat{\mu}) + A \int_K |\Delta(\hat{U}_n - \hat{U})|^2 d\Omega.$$

Remarquons que grâce à la proposition (3.2.2) assurant que la mesure  $\mu \leq \text{Cap}_1$ , nous déduisons

$$\Delta(\hat{U}_n - \hat{U}) \longrightarrow 0 \quad \hat{\mu}\text{-pp sur } \Omega.$$

Arguons de la version  $L^2$  du théorème d'Egorov au sens des capacités<sup>7</sup> pour assurer qu'il existe un ensemble  $K' \subset K$  tel que  $\Delta(\bar{U}_n - \bar{U}) \longrightarrow 0$  uniformément sur  $K \setminus K'$ , avec  $\hat{\mu}(K') \leq \epsilon$ , donc

$$\int_{K \setminus K'} |\Delta(\hat{U}_n - \hat{U})|^2 d(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}) < \epsilon^2 (\hat{\mu}(K) + \hat{\mu}_n(K))$$

ce dernier terme est contrôlé par les bornes sur  $\hat{\mu}(\Omega)$  et  $\hat{\mu}_n(\Omega)$  qui sont finies et indépendantes de  $n$ . De plus

$$\int_{K'} |\Delta(\hat{U}_n - \hat{U})|^2 d(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}) \leq \left( \|\Delta \hat{U}_n\|_{L^\infty(K)} + \|\Delta \hat{U}\|_{L^\infty(K)} \right) \cdot \left( \hat{\mu}(K') + \hat{\mu}_n(K') \right),$$

où nous savons que les normes des laplaciens sont finies et la conclusion voulue est acquise dès lors que

$$\hat{\mu}_n(K') \longrightarrow \hat{\mu}(K'),$$

ce qui est assuré par la convergence faible dans  $\mathbb{H}^3$  de  $\hat{U}_n$  vers  $\hat{U}$ , puisque pour tout  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \phi d\hat{\mu}_n = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \Delta \hat{U}_n \longrightarrow - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \Delta \hat{U} = \int_{\Omega} \phi d\hat{\mu}.$$

Finalement  $\|(\hat{U}_n - \hat{U})\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)} \longrightarrow 0$ , et donc  $\|(U_n - U)\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)} \longrightarrow 0$ , CQFD. ♦

---

7

**Théorème 3.5.3** (D. EGOROV - 1911) *Soit  $E$  un espace mesuré muni d'une mesure finie  $\mu$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions mesurables de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant  $\mu$ -p.p. vers  $f$  mesurable sur  $E$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un ensemble  $K' \subset E$ ,  $\mu(K') < \epsilon$  et tel que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $E \setminus K'$ .*

Sa généralisation aux espaces  $L^p$  a été faite par D. R. ADAMS & L. I. HEDBERG [2] page 26 :

**Théorème 3.5.4** *Soit  $E$  un espace mesuré muni d'une mesure finie  $\mu$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de Cauchy de fonctions  $L^2(E, \mu)$  convergeant vers  $f$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un ensemble  $K' \subset E$ ,  $\text{Cap}_1(K') < \epsilon$  et tel que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $E \setminus K'$ .*

## 3.6 Théorème de stabilité « à la Schaeffer » pour le bilaplacien

Nous nous proposons de donner un théorème de stabilité analogue à celui énoncé et démontré dans [117] par D. Schaeffer, pour le cas des membranes linéaires. Pour ce faire nous nous restreignons au cas où les données  $(\partial\Omega, \psi$  et  $F)$  sont toutes lisses. Nous donnons ci-dessous une preuve basée sur la version du Théorème des fonctions implicites 2.7.2 en adaptant la stratégie de celle du Théorème 2.7.1 de D. Schaeffer, nécessitant des estimations de Schauder assez fines. Afin simplifier la présentation, nous commençons par nous limiter à  $\psi \equiv 0$ . Ce paragraphe reprend et détaille l'essentiel de [104] publié dans *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* en collaboration avec A. Léger. Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à une Note [103].

### 3.6.1 Théorème de stabilité : une première version

**Théorème 3.6.1** Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \equiv 0$  et  $G = 1$ . Considérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{K} = \{V \in \mathbb{H}^2(\Omega) / V|_{\partial\Omega} = 1, V \geq 0 \text{ sur } \Omega\} \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\Delta V|^2 - FV d\Omega \end{array} \right. \quad (3.34)$$

et supposons que pour  $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , les deux conditions suivantes soient satisfaites :

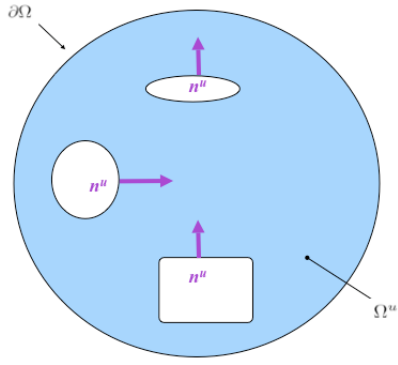
$$\begin{array}{ll} (i) & -F^\circ \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}^\circ. \\ (ii) & \mathcal{I}^\circ := \mathcal{I}(F^\circ) \text{ soit une union finie de surfaces lisses à bord, (i.e } C^\infty). \end{array} \quad (3.35)$$

Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\mathcal{I}(F)$  est difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

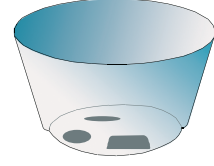
**Remarque 3.6.1** D'après le théorème 3.4.1, sous les hypothèses précédentes, nous savons que les composantes connexes (qui sont en nombre fini) de  $\mathcal{I}(F^\circ)$  sont simplement connexes. L'hypothèse (i) impose une réaction non-nulle sur toute la zone de contact (contact franc), et donc pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $F \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}(F)$ . Alors, puisque  $(U, \mathcal{I}(F))$  sont suffisamment régulières la formulation forte de (3.34) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U & = & F \quad \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{I}(F), \\ \Delta^2 U & \geq & F \quad \text{dans } \Omega, \\ U & \geq & 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ U & = & 1 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ U & = & 0 \quad \text{sur } \mathcal{I}(F) \\ \partial_n U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F), \\ \partial_n^2 U & = & 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right. \quad (3.36)$$

#### Démonstration du Théorème 3.6.1



Allure du domaine extérieur  $\Omega^u$



### 3.6.1.1 Traduction en équation fonctionnelle

• Soit  $(U^\circ, \mathcal{I}^\circ)$  une solution de (3.36), pour  $F^\circ$  donnée, satisfaisant les hypothèses (3.35). Pour simplifier nous écrirons  $\Gamma^\circ := \partial\mathcal{I}^\circ$ .

• Soit  $u \in C^k(\Gamma^\circ)$  une fonction à valeurs réelles, et soit l'application

$$\Upsilon^u : \Gamma^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Upsilon^u(X) := X + u(X)n^\circ(X),$$

où  $n^\circ(X)$  est la normale unitaire extérieure à  $\Gamma^\circ$ ,  $X$  l'abscisse curviligne sur  $\Gamma^\circ$ .

• Soit  $\Gamma^u$ , l'image de  $\Gamma^\circ$  par  $\Upsilon^u$ ,  $\mathcal{I}^u$  la région bordée par  $\Gamma^u$  et  $\Omega^u := \Omega \setminus \mathcal{I}^u$ .

• Soit  $\mathcal{O} := \{(u, F) \in C^{4,\alpha}(\Gamma^\circ) \times C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{C^{4,\alpha}(\Gamma^\circ)} \leq \eta \text{ \& \, } \|F - F^\circ\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \eta\}$ , pour  $0 < \alpha < 1$ .

La fonction  $u$  apparait comme une perturbation de la frontière libre  $\partial\mathcal{I}^\circ$ . C'est ce qu'affirme le lemme suivant.

**Lemme 3.6.1** *Si  $\eta > 0$  est suffisamment petit, si  $u \in C^k(\Gamma^\circ)$ , avec  $\|u\|_k \leq \eta$ , alors  $\Upsilon^u$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $\Gamma^\circ$  sur  $\Gamma^u$ .*

**Preuve :** ♦ En effet,  $\Upsilon^u$  est injectif de matrice Jacobienne inversible si  $\|u\|_k$  est assez petite (perturbation de l'identité), donc c'est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $\Gamma^\circ$  sur son image. ♦

• A présent introduisons l'application<sup>8</sup>  $T$  :

$$T[u, F] := \partial_{n^\circ}^2 U^u \circ \Upsilon^u, \quad \text{pour tout } (u, F) \in \mathcal{O}. \quad (3.37)$$

Où  $U^u$  est solution du problème aux limites elliptiques :

<sup>8</sup>  $\partial_{n^\circ}^2$  est défini à la Remarque 2.7.1 en bas de page.

$$\begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{sur } \Omega^u \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ U^u = 0 & \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^\circ} U^u = 0 & \text{sur } \Gamma^u \end{cases} \quad (3.38)$$

**Lemme 3.6.2** *Pour  $(u, F) \in \mathcal{O}$ , la fonction  $\mathsf{T}[u, F]$  appartient à  $C^{2,\alpha}(\Gamma^\circ)$ .*

**Preuve :** ♦ Par composition  $\Upsilon^u \in C^{4,\alpha}(\Gamma^\circ, \Gamma^u)$  si  $u \in C^{4,\alpha}(\Gamma^\circ)$ . Donc le bord de  $\Omega^u$  est au moins de classe  $C^{4,\alpha}$ , puisque  $\Omega^\circ$  est supposé lisse. Alors de [6] se déduit l'estimation suivante :

$$\partial_{n^\circ}^2 U^u \in C^{2,\alpha}(\Gamma^u, \Omega).$$

En effet grâce au Théorème 7.3. page 668 de [6] la solution de (3.38) appartient à  $C^{k+4,\alpha}(\overline{\Omega^u})$  si  $F \in C^{k,\alpha}(\Omega^u)$ . ♦

**Commentaires 3.6.1** La preuve du Lemme 3.6.2 justifie la définition de  $\mathcal{O}$ . L'utilité de l'introduction de cette fonctionnelle réside dans l'équivalence ci-dessous :

$$\left( \mathsf{T}[u, F] = 0 \right) \iff \left( \partial_{n^\circ}^2 U^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u \right)$$

Elle représente la donnée surabondante de Neumann sur  $\Gamma^u$  rapportée à la normale  $n^\circ$ .

• La proposition ci-dessous justifie que nous considérons  $U^u$  comme la solution de (3.34) associée à  $F$ . Il s'agit d'une conséquence immédiate du Lemme 3.1.1 pourvu que  $U^u > 0$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}(F^u)$ , ce que montrera la Proposition 3.6.6.

**Proposition 3.6.1** *Si  $U^u$  solution de (3.38) vérifie  $U^u > 0$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}(F)$ , alors la fonction  $\tilde{U}^u$  égale à  $U^u$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}(F)$  et identiquement nulle sur  $\mathcal{I}(F)$  est égale à la solution du problème (3.34).*

### 3.6.1.2 Métrique, courbure et différentielles sur la frontière libre

Comme nous l'avons fait dans la présentation de la preuve du Théorème 2.7.1 de Schaeffer, nous allons utiliser  $\mathbf{g}^u$  la métrique scalaire (riemannienne) sur  $\Gamma^u$ , induite par l'application  $\Upsilon^u : \partial\mathcal{I}^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , i.e la métrique qui, par rapport à un système de coordonnées sur  $\partial\mathcal{I}^\circ$ , d'abscisse curviligne noté  $X$ , a pour expression :

$$\mathbf{g}^u := \sum_{l=1,2} \left[ \partial_X (\Upsilon^u)_l \right]^2 = 1 + (u'(X))^2.$$

La fonction  $\hbar^u$  donnée à la Définition 2.7.1 est le carré de la courbure (normale) donc inverse du carré du rayon de courbure :

$$\hbar^u = 1 + (\mathbf{g}^u)^{-1} \left[ \partial_X u \right]^2 = 1 + \frac{(u'(X))^2}{1 + (u'(X))^2} = (\cos(\mathfrak{B}^u))^{-2}.$$

Avec  $\mathbb{B}^u := \angle(n^\circ, n^u)$  l'angle que fait la normale  $n^\circ$  de  $\partial\mathcal{I}^\circ$ , avec  $n^u$  celle de  $\partial\mathcal{I}^u$ .

- Nous cherchons à définir un opérateur linéaire  $L_{u,F}$  comme approximation à erreur quadratique de  $\partial_u T$  et égal à  $\partial_u T[u, F]$  sous la condition (3.39).

Soit  $U^u$  solution de (3.38). Supposons que l'on ait :

$$T[u, F] = 0, \text{ i.e } \partial_{n^\circ}^2 U^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u. \quad (3.39)$$

Définissons un voisinage tubulaire de  $\Gamma^u$  par

$$\Gamma^\circ \times ]-t_0, +t_0[ \ni (X, t) \mapsto X + [u(X) + t]n^\circ. \quad (3.40)$$

Clairement pour  $t = 0$ , il s'agit du paramétrage de  $\Gamma^u$ .

Donnons un développement de Taylor de  $U^u$  en la variable  $t \geq 0$ , en un point  $X$  fixé de  $\Gamma^\circ$ . En tenant compte de (3.39) et (3.38), il vient :

$$U^u(X, t) = \overbrace{U^u(X, 0)}^{=0} + \overbrace{t\partial_{n^\circ} U^u(X, 0)}^{=0} + \overbrace{\frac{t^2}{2}\partial_{n^\circ}^2 U^u(X, 0)}^{=0} + \frac{t^3}{6}\partial_{n^\circ}^3 U^u(X, 0) + o(t^3) \quad (3.41)$$

Pour calculer la dérivée de  $T[u, F]$  par rapport à  $u$ , nous considérons le problème aux limites (3.38) ayant pour données  $(u + \varepsilon v, F)$ , avec  $v \in C^k(\Gamma^\circ)$ , et cherchons une solution de la forme  $U^{u+\varepsilon v} = U^u + \varepsilon V$ . Ainsi nous déduisons que  $V$  résout le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 V & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Omega^{u+\varepsilon v} \\ U^u + \varepsilon V & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{u+\varepsilon v} \\ \partial_n(U^u + \varepsilon V) & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{u+\varepsilon v} \\ V & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \partial_n V & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U^{u+\varepsilon v} & = & F \quad \text{sur} \quad \Omega^{u+\varepsilon v} \\ U^{u+\varepsilon v} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{u+\varepsilon v} \\ \partial_n U^{u+\varepsilon v} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{u+\varepsilon v} \\ U^{u+\varepsilon v} & = & 1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \partial_n U^{u+\varepsilon v} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.43)$$

La courbe  $\Gamma^{u+\varepsilon v}$  appartient au voisinage tubulaire de  $\Gamma^u$  défini par (3.40), pour  $\varepsilon$  assez petit. En choisissant  $t = \varepsilon v$  il vient, par le développement (3.41), que

$$U|_{\Gamma^{u+\varepsilon v}} = O(\varepsilon^3).$$

Effectuons le calcul de la dérivée partielle directionnelle suivant  $v$  :

$$\partial_u T([u, F]; v) = \frac{d}{d\varepsilon} T[u + \varepsilon v, F]|_{\varepsilon=0}.$$

Pour cela considérons une variation de  $u$  en  $u + \varepsilon v$ . Puisque  $U^{u+\varepsilon v}$  vérifie (3.43), et

$$T[u + \varepsilon v, F] = \partial_{n^\circ}^2 U^{u+\varepsilon v} \text{ sur } \Gamma^{u+\varepsilon v}.$$

Posons

$$W := \partial_\varepsilon(U^{u+\varepsilon v})|_{\varepsilon=0} = (\partial_u U^u)v$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 W & = & 0 \quad \text{sur } \Omega^u \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ W + v\partial_{n^0} U^u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^0} W + v\partial_{n^0}^2 U^u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \end{array} \right.$$

En utilisant  $\partial_{n^0} U^u = 0$  sur  $\Gamma^u$  nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 W & = & 0 \quad \text{sur } \Omega^u \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^0} W + v\partial_{n^0}^2 U^u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \end{array} \right. \quad (3.44)$$

En conclusion la dérivée directionnelle suivant  $v$  :

$$\partial_u \mathbf{T}([u, F]; v) = \partial_{n^0}^2 W + v\partial_{n^0}^3 U^u \text{ évaluée sur } \Gamma^u.$$

Donc sous la condition (3.39) :  $W = 0$  et

$$\mathbf{T}[u + \varepsilon v, F] \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \partial_{n^0}^2 U^u(., 0)|_{\Gamma^{u+\varepsilon v}} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon v \partial_{n^0}^3 U^u(., 0). \quad (3.45)$$

Ainsi nous avons montré que  $\partial_u \mathbf{T}$  sous la condition (3.39) est un opérateur multiplicatif, multipliant par  $\partial_{n^0}^3 U^u(., 0)|_{\Gamma^u}$ .

• La proposition suivante est le prochain pas de notre preuve et requiert quelques outils de géométrie différentielle.

**Proposition 3.6.2** *Soit  $U^u$  la solution de (3.38). Alors*

$$\partial_{n^u} U^u = \sqrt{(\hbar^u)} \partial_{n^0} U^u \circ \Upsilon^u, \text{ sur } \Gamma^u.$$

$$\partial_{n^0}^4 U^u = \cos^4(\beta^u) F, \text{ sur } \Gamma^u \text{ pourvu que } U^u = \partial_{n^0} U^u = \partial_{n^0}^2 U^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u.$$

**Preuve de la Proposition 3.6.2 :** ♦ Nous allons opérer en quatre points. Plaçons nous dans le voisinage tubulaire de  $\Gamma^u$ , noté  $TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$ , décrit par

$$TUB^\varepsilon(\Gamma^u) := \{\gamma^u(\chi_1) + \chi_2 n^u / (\chi_1, \chi_2) \in \Gamma^u \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \}.$$

Les coordonnées locales dans  $TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$  sont désignées par  $(\chi_1, \chi_2)$ , (voir figure 2.3.2). Soit  $P \in TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$ ,  $P(\chi_1, \chi_2) := \gamma^u(\chi_1) + \chi_2 n^u(\chi_1)$ ,  $\gamma^u$  étant tangent à  $\Gamma^u$ , et  $n^u$  étant la normale unitaire à la courbe  $\Gamma^u$ . Ainsi, en notant  $\cdot$  la dérivée par rapport à  $\chi_1$  il vient :

$$\partial_{\chi_1} P(\chi_1, \chi_2) = \dot{\gamma}^u + \chi_2 \dot{n}^u \text{ et } \partial_{\chi_2} P(\chi_1, \chi_2) = \dot{n}^u,$$

d'où nous tirons des coordonnées euclidiennes pour la métrique Riemanienne induite par  $\mathbf{g}$ , et qui sera notée  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{g}}$  :

$$\vec{x}_1 = \frac{\partial_{\chi_1} P}{\|\partial_{\chi_1} P\|}, \vec{x}_2 = \partial_{\chi_2} P.$$

Autrement dit dans cette base

$$[\mathbf{g}]_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hbar^u} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi dans le voisinage tubulaire  $TUB^\varepsilon(\Gamma^u)$  nous avons

$$\text{Grad}U = (\sqrt{\hbar^u} \partial_{\chi_1} U^u, \partial_{\chi_2} U^u).$$

**Point 1 :**  $(U^u = 0, \partial_{n^\circ} U^u = 0, \partial_{n^\circ}^2 U^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u) \iff (U^u = 0, dU^u = 0, d^2 U^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u)$

► D'abord nous remarquons que  $U^u \in C^\infty(\overline{\Omega^u})$ . Dans le système de coordonnées locales  $(\chi_1, \chi_2)$  si  $\chi_2 = 0$ , nous avons un paramétrage de  $\Gamma^u$ . Or sur  $\Gamma^u$ ,  $U^u = 0$ , ce qui est équivalent à  $U^u(\gamma^u(\chi_1), 0) = 0, \forall \chi_1$ , donc  $\partial_{\chi_1} U^u = \partial_{\chi_2} U^u = 0$ , sur  $\Gamma^u$ . Nous avons :

$$\partial_{n^\circ}^2 U^u = \partial_{n^\circ} (\partial_{n^\circ} U^u) = \partial_{n^\circ} (\langle \text{Grad}U^u | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}}) \stackrel{(\spadesuit)}{=} \langle \nabla_{n^\circ} \text{Grad}U^u | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}} + \overbrace{\langle \text{Grad}U^u | \nabla_{n^\circ} \rangle_{\mathbf{g}}}^{(\clubsuit)}$$

La formule de Levi-Civita<sup>9</sup> justifie l'égalité  $(\spadesuit)$ ; puisque  $\text{Grad}U^u = (0, 0)$  sur  $\Gamma^u$ , le terme  $(\clubsuit)$  est nul sur  $\Gamma^u$ . Donc :

$$\begin{aligned} \partial_{n^\circ}^2 U^u &= \sqrt{\hbar^u} \partial_{\chi_1} (\sqrt{\hbar^u}) \partial_{\chi_1} U^u \sin(\beta^u) \cos(\beta^u) + (\sqrt{\hbar^u})^2 \partial_{\chi_1}^2 U^u \sin(\beta^u) \cos(\beta^u) \\ &\quad + \sqrt{\hbar^u} \partial_{\chi_1} (\sqrt{\hbar^u})^2 \partial_{\chi_1} U^u \sin(\beta^u) \cos(\beta^u) + \partial_{\chi_2}^2 U^u \cos^2(\beta^u), \end{aligned}$$

qui est nul sous la condition  $d^2 U^u = 0$  sur  $\Gamma^u$ , sachant que  $\text{Grad}U^u = (0, 0)$  sur  $\Gamma^u$ .

**Point 2 :** La dérivée tangentielle troisième de  $U^u$  est nulle, sur  $\Gamma^u$  i.e.  $\partial_{\chi_1}^3 U^u = 0$ , sur  $\Gamma^u$ . Pour les mêmes raisons,  $\partial_{\chi_1, \chi_2, \chi_2}^3 U^u = \partial_{\chi_1, \chi_1, \chi_2}^3 U^u = 0$ , sur  $\Gamma^u$ .

► Puisque  $\partial_{\chi_1}^2 U^u(\gamma^u(\chi_1), 0) = \partial_{\chi_1, \chi_2}^2 U^u(\gamma^u(\chi_1), 0) = \partial_{\chi_2}^2 U^u(\gamma^u(\chi_1), 0) = 0, \forall \chi_1 \in \Gamma^u$ . C'est à dire que toutes ces dérivées sont des fonctions indetiquement nulles sur  $\Gamma^u$ , elles sont de dérivée nulle par rapport  $\chi_2$ .

En conclusion, la seule dérivée partielle qui soit éventuellement non nulle sur  $\Gamma^u$  est  $\partial_{\chi_2}^3 U^u$ , ce qui est cohérent avec (3.45).

---

<sup>9</sup>Voir l'Annexe D.

---

**Point 3 :** Le bilaplacien de  $U^u$ , devient dans ce système de coordonnées  $\Delta_{\mathbf{g}}^2 U^u = \partial_{n^u}^4 U^u = F$ , sur  $\Gamma^u$ .

► Nous renvoyons à l'Annexe **D** pour la définition de l'opérateur de Laplace-Beltrami<sup>10</sup> relatif à la métrique  $\mathbf{g}$ , noté  $\Delta_{\mathbf{g}}$ . Nous savons que

$$\Delta_{\mathbf{g}} U^u = \text{Div}(\text{Grad} U^u) = \text{Tr}(\nabla \text{Grad} U^u),$$

et dans la base orthonormale  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,

$$\Delta_{\mathbf{g}} U^u = \langle \vec{x}_1 | \nabla_{\vec{x}_1} \text{Grad} U^u \rangle_{\mathbf{g}} + \langle \vec{x}_2 | \nabla_{\vec{x}_2} \text{Grad} U^u \rangle_{\mathbf{g}}$$

donc

$$\Delta_{\mathbf{g}}(\Delta_{\mathbf{g}} U^u) = \Delta_{\mathbf{g}}\left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}^u\|_{\mathbf{g}}^2} \partial_{\chi_1}^2 U^u + \partial_{\chi_2}^2 U^u\right) = \Delta_{\mathbf{g}}\left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}^u\|_{\mathbf{g}}^2} \partial_{\chi_1}^2 U^u\right) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}^u\|_{\mathbf{g}}^4} \partial_{\chi_1}^4 U^u.$$

Or sur  $\Omega^u$ ,  $\Delta^2 U^u = F$ , ce qui démontre le point 3.

**Point 4 :** A présent nous pouvons établir la formule annoncée :

$$\partial_{n^\circ}^4 U^u = \cos^4(\beta^u) \partial_{n^u}^4 U^u \text{ sur } \Gamma^u.$$

► Par la formule de Levi-Civita

$$\partial_{n^\circ}^2 U^u = \langle \text{Grad} \langle \text{Grad} U^u | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}} | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}}$$

Ecrivons :

$$n^\circ = \cos(\beta^u) \partial_{\chi_2} + \frac{1}{\|\partial_{\chi_1}\|_{\mathbf{g}}} \sin(\beta^u) \partial_{\chi_1}, \text{ et } \text{Grad} U^u = \frac{1}{\|\partial_{\chi_1}\|_{\mathbf{g}}} (\partial_{\chi_1} U^u) \partial_{\chi_1} + (\partial_{\chi_2} U^u) \partial_{\chi_2}$$

Alors

$$\nabla_{n^\circ} \text{Grad} U^u = \cos(\beta^u) \nabla_{\chi_2} \text{Grad} U^u + \frac{1}{\|\partial_{\chi_1}\|_{\mathbf{g}}} \sin(\beta^u) \nabla_{\chi_1} \text{Grad} U^u.$$

En développant  $\langle \nabla_{n^\circ} \text{Grad} U^u | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}}$  sur  $\Gamma^u$ , on obtient :  $\partial_{n^\circ}^2 U^u = \cos^2(\beta^u) \partial_{n^u}^2 U^u$ . En effet sur  $\Gamma^u$  les termes  $\partial_{\chi_2}^2 U^u$  et  $\partial_{\chi_2 \chi_1}^2 U^u$  sont nuls, et l'angle entre la normale à  $\Gamma^\circ$  et l'axe des  $\chi_2$  est  $\cos(\beta^u)$ . On conclut alors grâce au point 2 en réitérant par la formule de Levi-Civita le même procédé sur  $\Gamma^u$  :

$$\begin{aligned} \langle \text{Grad} \partial_{n^\circ}^2 U^u | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}} &= \partial_{n^\circ}^3 U^u \\ \text{Grad} \partial_{n^\circ}^2 U^u &= \left( \sqrt{\hbar^u} \partial_{\chi_1}^2 (\sqrt{\hbar^u}) \partial_{\chi_1} U^u \sin(\beta^u) \cos(\beta^u) \right. \\ &\quad + \sqrt{\hbar^u} \partial_{\chi_1} (\sqrt{\hbar^u})^2 \partial_{\chi_1}^2 U^u \sin(\beta^u) \cos(\beta^u) \\ &\quad + (\sqrt{\hbar^u})^3 \partial_{\chi_1}^3 U^u \sin(\beta^u) \cos(\beta^u) \\ &\quad \left. + \partial_{\chi_1} \partial_{\chi_2}^2 U^u \cos^2(\beta^u) , \partial_{\chi_2}^3 U^u \cos^2(\beta^u) \right), \end{aligned}$$

c'est à dire en tenant compte de  $dU^u = 0$  et  $d^2 U^u = 0$  sur  $\Gamma^u$  :

$$\partial_{n^\circ}^3 U^u = \cos^3(\beta^u) \partial_{\chi_2}^3 U^u.$$

Puis  $\langle \nabla_{n^\circ} \text{Grad} \partial_{n^\circ}^2 U^u | n^\circ \rangle_{\mathbf{g}} = \partial_{n^\circ}^4 U^u = \cos^4(\beta^u) F$ , sur  $\partial \mathcal{I}^u$ . ♦

---

<sup>10</sup> cet opérateur est :  $\Delta_{\mathbf{g}} V(X) = -\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \sum_{i,j} \partial_{X_i} V (\sqrt{\det(\mathbf{g})} \mathbf{g}^{ij} \partial_{X_j} V)$  si  $V \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ .



---

**Commentaires 3.6.2** Notons qu'au passage est apparu  $\frac{1}{\|\dot{\gamma}^u\|_{\mathbf{g}}^2} = \cos^2(\beta^u)$ , que nous avons noté  $\hbar^u$  pour simplifier.

### 3.6.1.3 Les conditions de Nash-Moser

Supposons à présent que nous soyons capable de trouver pour  $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$  une fonction  $u$  telle que :  $\mathbf{T}[u, F] = 0$ . Alors nous voulons résoudre l'équation fonctionnelle  $\mathbf{T}[u, F] = 0$ , par le Théorème des fonctions implicites de D. Schaeffer 2.7.2, en nous assurant que ses hypothèses sont satisfaites ici. Ainsi nous aurons trouvé la zone de contact  $\mathcal{I}^u$  de  $U^u$  associée à  $F$ , comme la perturbation (par  $u$ ) de la zone de contact  $\mathcal{I}^\circ$  de  $U^\circ$  associée à  $F^\circ$ .

Rappelons que si  $M$  désigne une variété avec ou sans bord :

$$C^\infty(M) = \bigcap_{\kappa \geq \lambda} C^\kappa(M).$$

Donc si par le Théorème des fonctions implicites de D. Schaeffer 2.7.2 nous résolvons  $\mathbf{T}[u, F] = 0$  pour tout  $\kappa \geq \lambda$  ( $\lambda$  réel positif suffisamment grand), alors nous la résolvons dans  $C^\infty$ .

**Les 5 Assertions :** Nous commençons par énoncer les hypothèses du Théorème des fonctions implicites 2.7.2 dans le cadre que l'on vient de poser. Rien ne change par rapport au cas de la membrane, vu au Théorème 2.7.1, si ce n'est l'ordre de l'opérateur et donc les espaces fonctionnels. Ensuite nous montrerons qu'elles sont bien vérifiées.

Introduisons les indices  $\varsigma = 4 + \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , et  $\iota \geq \varsigma$ .

$$(A.1) \quad \mathbf{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\varsigma-2}(\Gamma^\circ), \text{ opérateur non linéaire d'ordre } 2 \text{ tel que } \mathbf{T}[0, F^\circ] = 0$$

$$(A.2) \quad \|\mathbf{T}[u, F]\|_\iota \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\iota+2} + 1)$$

$$(A.3) \quad \|\mathbf{T}[u, F_1] - \mathbf{T}[u, F_2]\|_{\varsigma-2} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\varsigma$$

$$(A.4) \quad \exists \mathbf{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\varsigma(\Gamma^\circ), C^{\varsigma-2}(\Gamma^\circ)) \text{ /}$$

$$\|\mathbf{T}[u + w, F] - \mathbf{T}[u, F] - \mathbf{L}_{u,F}w\|_{\varsigma-2} \leq c_2 (\|\mathbf{T}[u, F]\|_\varsigma \|w\|_\varsigma + \|w\|_\varsigma^2)$$

$$(A.5) \quad \exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\varsigma+2}(\Gamma^\circ), C^\varsigma(\Gamma^\circ)) \text{ /}$$

$$(\mathbf{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})w := w \text{ et } \|\ell_{u,F}w\|_\iota \leq c_3 (\|w\|_{\iota+2} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\iota+2})$$

Bien entendu, les constantes  $c_i$  dépendent de  $\iota$  et  $\varsigma$  mais non de  $u, F, w$ .

$(\|\cdot\|_{k+\alpha})_{k \geq 0}$  représente une échelle de normes hölderiennes de plus en plus régulières, avec  $0 < \alpha < 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs, on a posé :

$$\|(u, F)\|_\iota := \|F\|_\iota + \|u\|_\iota$$

**Traduction des assertions :** (A.1) implique qu'on ne puisse pas appliquer le théorème des fonctions implicites classique à  $\mathbf{T}$ .

(A.2) l'application  $\mathbf{T}$  est  $C^0$  – douce.

(A.3)  $\mathbf{T}$  continu par rapport à la seconde variable.

(A.4)  $\mathbf{T}$  est différentiable par rapport à sa première variable si  $\mathbf{T}[u, F] = 0$ . L'opérateur linéaire  $\mathbf{L}_{u,F}$  est une approximation à erreur quadratique de  $\partial_u \mathbf{T}[u, F]$ .

(A.5)  $\mathbf{L}_{u,F}$  est inversible à droite, d'inverse  $\ell_{u,F}$ .

**Remarque 3.6.2** Sous la condition de raccord des courbures normales  $\mathbf{T}[u, F] = \partial_n^2 U^u \circ \Upsilon^u = 0$  sur  $\Gamma^u$ , nous avons  $\partial_u \mathbf{T}([u, F]; v) = v \partial_n^3 U^u$  sur  $\Gamma^u$ , nous montrerons que l'opérateur de multiplication par  $\mathbf{L}_{u,F}$  est une approximation à erreur quadratique de  $\partial_u \mathbf{T}$  avec :

$$\mathbf{L}_{u,F} := \partial_n^3 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u.$$

Nous posons alors

$$\ell_{u,F} := \frac{1}{\mathbf{L}_{u,F}} \text{ sur } \Gamma^u.$$

Pour justifier la validité de cette définition il faut s'assurer que  $\mathbf{L}_{u,F}$  est bien strictement positif sur  $\Gamma^u$ . Pour cela effectuons dans un voisinage tubulaire de  $\Gamma^\circ$  ( $t \geq 0$ ) le développement de Taylor suivant de la solution nominale  $U^\circ$  associée à  $F^\circ$  telle qu'elle est définie dans l'énoncé du Théorème 3.6.1 :

$$\begin{aligned} 0 \leq U^\circ(X, t) &= \overbrace{U^\circ(X, 0)}^{=0} + \overbrace{t \partial_n U^\circ(X, 0)}^{=0} + \\ &\quad \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_n^2 U^\circ(X, 0)}^{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_n^3 U^\circ(X, 0) \\ &\quad + \frac{t^4}{4!} \partial_n^4 U^\circ(X, 0) + o(t^4). \end{aligned}$$

Alors si  $\partial_n^3 U^\circ < 0$  en un point de  $\Gamma^\circ$  l'inégalité du contact est violée. Si nous supposons  $\partial_n^3 U^\circ = 0$  en un point de  $\Gamma^\circ$ , comme  $\partial_n^4 U^\circ = F^\circ$  sur  $\Gamma^\circ$ , avec  $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}^\circ$  alors l'inégalité du contact est encore violée. Donc  $\partial_n^3 U^\circ > 0$  sur  $\Gamma^\circ$  puisque  $\Gamma^\circ$  est compacte, et par continuité de  $\mathbf{L}_{u,F}$  par rapport à  $u$  et  $F$ , on conclut que  $\mathbf{L}_{u,F} := \partial_n^3 U^u$  sur  $\Gamma^u$  reste strictement positif pour autant que  $(u, F)$  soit suffisamment proche de  $(0, F^\circ)$ .

### 3.6.1.4 Inégalités Utiles

En vue de démontrer les assertions (A1)-(A5) ci-dessus, nous commençons par exhiber un certain nombre « d'estimations douces<sup>11</sup> de type Schauder », voir [8] & [64].

<sup>11</sup>voir Annexe A

**Proposition 3.6.3** (ESTIMATION DU PRODUIT)  $\forall \tau \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , et  $\forall v, w \in C^\tau(\Omega)$  :

$$\|vw\|_\tau \leq \text{constante} \left( \|v\|_0 \|w\|_\tau + \|v\|_\tau \|w\|_0 \right) \quad (3.46)$$

(ESTIMATION DE LA COMPOSITION)

$$\|w \circ v\|_\tau \leq \text{constante} \left( \|w\|_\tau \|v'\|_0 + \|v\|_\tau \|w'\|_0 + \|v\|_0 \right) \quad (3.47)$$

(ESTIMATION DE LA COMPOSITION PAR UNE APPLICATION LISSE)

$$\forall F \in C^\infty(\Omega), \quad \|F \circ v\|_\tau \leq \text{constante} \left( \|v\|_\tau + 1 \right) \quad (3.48)$$

La proposition suivante donne une estimation douce pour la composition avec  $\Upsilon^u$ , voir [117].

**Proposition 3.6.4** Soit  $F \in C^\tau(\Omega)$ , alors  $\exists C_1 > 0$  telle que :

$$\|F \circ \Upsilon^u\|_\tau \leq C_1 \left( \|F\|_\tau + \|F\|_1 \|u\|_\tau \right) \quad (3.49)$$

Enfin nous rappelons qu'il est établi dans [118] (grâce aux estimations douces de produit et de composition) :

**Proposition 3.6.5** Soit  $\hbar^u$  la fonction définie par (2.42), alors il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|\hbar^u\|_\tau \leq C(1 + \|u\|_{\tau+1}). \quad (3.50)$$

Le théorème suivant fournit un raffinement des estimations de Schauder classiques pour un problème aux limites elliptique d'ordre 4, ceci dans l'esprit de [118].

**Théorème 3.6.2** Soit  $U^u$  la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta^2 U^u &= F & \text{sur} & \Omega^u. \\ U^u &= \varphi_1 & \text{sur} & \partial\Omega^u. \\ \partial_n U^u &= \varphi_2 & \text{sur} & \partial\Omega^u. \end{cases} \quad (3.51)$$

alors si  $\iota > 4$ , il existe  $C_0 > 0$  tel que :

$$\|U^u\|_\iota \leq C_0 \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_\iota + \|\varphi_2\|_\iota + \|u\|_\iota (\|F\|_\alpha + \|\varphi_1\|_{\alpha+4} + \|\varphi_2\|_{\alpha+4}) \right) \quad (3.52)$$

**Démonstration du Théorème 3.6.2 :** ♦ Commençons par rappeler l'estimation suivante de Agmon-Douglis-Nirenberg [6] (Theorem 7.3. et Remark 2 pages 668-669) :

**Théorème 3.6.3** Soit  $\mathbf{A}$  un opérateur elliptique d'ordre 4 sur un domaine fixé  $\Omega^\circ$  à bord lisse

$$\mathbf{A}(X, \partial) = \sum_{|i| \leq 4} \mathbf{a}_i(X) \partial^i.$$

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \mathbf{A}(X, \partial)V = F & \text{sur } \Omega^\circ. \\ V = \varphi_1 & \text{sur } \partial\Omega^\circ. \\ \partial_n V = \varphi_2 & \text{sur } \partial\Omega^\circ. \end{cases} \quad (3.53)$$

Supposons qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\mathbf{A}$  vérifie :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|\mathbf{a}\|_{\max, \iota-4} := \max_{|i| \leq 4} \|\mathbf{a}^i\|_{\iota-4} \leq M, \\ (ii) \quad & \inf_X \inf_{|\xi|=1} \sum_{|i|=4} |\mathbf{a}_i(X) \xi^i| \geq \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Alors il existe  $C > 0$  indépendante de  $V$  telle que :

$$\|V\|_\iota \leq C \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_\iota + \|\varphi_2\|_\iota + \|V\|_0 \right) \quad (3.55)$$

Puisque le domaine  $\Omega^\circ$  est borné, le terme  $\|V\|_0$  de (3.53) peut être omis, et la constante  $C > 0$ , bien que dépendante de la forme de l'équation (3.53), ne dépend pas de  $V$ .

**Remarque 3.6.3** La preuve de l'omission du terme  $\|V\|_0$  de (3.55) est justifiée comme suit dans [6]. Si la solution de (3.55) est unique (ce qui sera notre cas d'application) alors :

$$\|V\|_0 \leq C \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_\iota + \|\varphi_2\|_\iota \right). \quad (3.56)$$

En effet supposons par l'absurde que (3.56) ne soit pas vrai, alors il existerait une suite de fonctions  $V_n \in C^u(\overline{\Omega^\circ})$  de norme  $\|V_n\|_0 = 1$  telles que le second terme de (3.56) tende vers 0 pour le  $V_n$  correspondant quand  $n \rightarrow +\infty$ . Or de (3.55) nous voyons que la norme  $\|\cdot\|_\iota$  est uniformément bornée. Il en vient l'existence d'une sous-suite qui converge pour la norme  $\|\cdot\|_\iota$  vers la solution  $V$  du problème aux limites à données nulles, qui est donc par unicité  $V = 0$ , ce qui contredit le fait que  $\|V\|_0 = 1$  !

Ce raisonnement s'applique, pour la norme  $\|\cdot\|_\alpha$ , aux deux lemmes suivants qui raffinent l'estimation (3.55).

**Lemme 3.6.3** Soit  $\mathbf{A}$  l'opérateur bilaplacien-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2$ , dont les coefficients sont notés  $(a_i^u)_i$ . Avec les notations des théorèmes 3.6.2 et 3.6.3, posons  $\iota > 4$  non-entier, alors pour  $M' > 0$ , il existe une constante  $C' > 0$  telle que si (i) du Théorème 3.6.3 est remplacée par :

$$(i') \quad \|\mathbf{a}\|_{\max, \alpha} \leq M',$$

alors la solution de (3.53) satisfait l'estimation, pour  $q = \frac{\iota}{\iota-4}$ , :

$$\|V\|_{\iota} \leq C' \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_{\iota} + \|\varphi_2\|_{\iota} + \|V\|_{\alpha} + \|\mathbf{a}\|_{\iota-4}^q (\|F\|_{\alpha} + \|\varphi_1\|_{4+\alpha} + \|\varphi_2\|_{4+\alpha} + \|V\|_{\alpha}) \right) \quad (3.57)$$

Puisque le domaine  $\Omega^{\circ}$  est borné le terme  $\|V\|_{\alpha}$  peut être omis.

**Preuve du Lemme 3.6.3 :** ♦ Elle sera donnée en annexe E. Remarquons que les coefficients  $(a_i^u)_i$  de l'opérateur bilaplacien-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2$ , vérifient bien l'hypothèse (i') (cf. la formule (3.67) suivante). D. SCHAEFFER [118] indique que les arguments employés pour obtenir les estimations de Schauder voulues pour le problème aux limites de l'opérateur de Laplace-Beltrami, fonctionnent également pour des opérateurs d'ordres plus élevés et des conditions aux limites plus générales. L'auteur emploie le principe du maximum pour éliminer des estimations la norme  $\|V\|_0$ , mais la Remarque 3.6.3 nous assure que l'on peut se passer du terme  $\|V\|_{\alpha}$ . ♦

**Lemme 3.6.4** Sous les hypothèses du Lemme 3.6.3, nous avons l'estimation plus fine suivante :

$$\|V\|_{\iota} \leq C'' \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_{\iota} + \|\varphi_2\|_{\iota} + \|V\|_{\alpha} + \|\mathbf{a}\|_{\iota-4} (\|F\|_{\alpha} + \|\varphi_1\|_{4+\alpha} + \|\varphi_2\|_{4+\alpha} + \|V\|_{\alpha}) \right) \quad (3.58)$$

A nouveau puisque le domaine  $\Omega^{\circ}$  est borné le terme  $\|V\|_{\alpha}$  peut être omis.

**Preuve du Lemme 3.6.4 :** ♦ Introduisons l'opérateur de Nash :  $\mathbb{N}_n$ . Pour cela considérons  $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , une fonction lisse ayant une transformée de Fourier à support compact et égale à l'identité au voisinage de l'origine. Pour  $n \geq 1$ , posons  $\chi_n(X) = n^2 \chi(nX)$ , et  $\mathbb{N}_n(f) := \chi_n * f$ , avec  $f \in C^0(\overline{\Omega^{\circ}})$ , le produit de convolution étant noté  $*$ . Nous avons alors, les estimations suivantes

$$\|\mathbb{N}_n(f)\|_{\iota+\tau} \leq C^{(4)} n^{\tau} \|f\|_{\iota}, \text{ et } \|[\mathbf{Id} - \mathbb{N}_n](f)\|_{\iota} \leq C^{(5)} n^{-\tau} \|f\|_{\iota+\tau}. \quad (3.59)$$

Décomposons l'opérateur  $\mathbf{A}$  de (3.53) comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{A} &= \dot{\mathbf{A}} + \ddot{\mathbf{A}} \\ \dot{\mathbf{A}} &:= \sum \dot{\mathbf{a}}^i \partial^i, & \text{avec} & \dot{\mathbf{a}}^i := \mathbb{N}_n(\dot{\mathbf{a}}^i) \\ \ddot{\mathbf{A}} &:= \sum \ddot{\mathbf{a}}^i \partial^i & \text{avec} & \ddot{\mathbf{a}}^i := [\mathbf{Id} - \mathbb{N}_n](\ddot{\mathbf{a}}^i). \end{cases} \quad (3.60)$$

Ainsi (3.53) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}V &= F - \ddot{\mathbf{A}}V & \text{sur} & \Omega^{\circ}. \\ V &= \varphi_1 & \text{sur} & \partial\Omega^{\circ}. \\ \partial_n V &= \varphi_2 & \text{sur} & \partial\Omega^{\circ}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Il vient du lemme (3.6.3) l'inégalité suivante :

$$\|V\|_{\iota} \leq C^{(6)} \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\ddot{\mathbf{A}}V\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_{\iota} + \|\varphi_2\|_{\iota} + \|Cn^{\iota-4}M\|_{\iota-4}^q (\|F\|_{\alpha} + \|\ddot{\mathbf{A}}V\|_{\alpha} + \|\varphi_1\|_{4+\alpha} + \|\varphi_2\|_{4+\alpha}) \right) \quad (3.62)$$

où le (Lemme 3.6.3) et l'hypothèse (ii) du Théorème 3.6.3 ont été utilisés pour estimer  $\|\dot{\mathbf{a}}\|_{\iota-4}$ .

Quant au terme  $\|\ddot{\mathbf{A}}V\|_{\iota-4}$  il peut être estimé grâce à (3.46) pour donner :

$$\|\ddot{\mathbf{A}}V\|_{\iota-4} \leq C^{(7)} \left( \|V\|_{\iota} \|\dot{\mathbf{a}}\|_{\max,0} + \|V\|_4 \|\dot{\mathbf{a}}\|_{\iota-4} \right) \quad (3.63)$$

En outre viennent de (3.59) les inégalités :

$$\|\dot{\mathbf{a}}\|_{\max,0} \leq C^{(8)} n^{-\alpha} \|\dot{\mathbf{a}}\|_{\max,\alpha} \leq C^{(9)} M n^{-\alpha}.$$

Nous choisissons  $n$  suffisamment grand pour que le premier terme de (3.63) n'excède pas  $\frac{1}{2}\|V\|_{\iota}$ . Enfin pour le second terme de (3.63) nous avons par des estimations de Schauder classiques que :

$$\|\dot{\mathbf{a}}\|_{\max,\iota-4} \|V\|_4 \leq C^{(10)} \|\dot{\mathbf{a}}\|_{\max,\iota-4} \|V\|_{4+\alpha} \leq C^{(11)} \|\dot{\mathbf{a}}\|_{\max,\iota-4} \|F\|_s.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.6.4. ♦

Pour finir la preuve du Théorème 3.6.2, il faut justifier que l'on puisse passer du domaine fixe  $\Omega^\circ$ , du Théorème 3.6.3, pour lequel l'opérateur  $\mathbf{A}$  est  $\Delta_{(\mathbf{g}_u)}^2$ , à  $\Omega^u$  du Théorème 3.6.2 pour lequel l'opérateur est le bilaplacien. La transition se fait grâce à l'application  $\overline{\Upsilon}^u : \Omega^\circ \rightarrow \Omega^u$ , par prolongement à  $\Omega^\circ$  de l'application  $\Upsilon^u : \Gamma^\circ \rightarrow \Gamma^u$  définie plus haut. Pour cela plaçons nous dans le voisinage tubulaire de  $\Gamma^\circ$ , noté  $TUB^\varepsilon(\Gamma^\circ)$ , décrit par

$$TUB^\varepsilon(\Gamma^\circ) := \{\gamma^\circ(\chi_1) + \chi_2 n^\circ / (\chi_1, \chi_2) \in \Gamma^\circ \times ] - 4\varepsilon, +4\varepsilon[ \}.$$

Les coordonnées locales dans  $TUB^\varepsilon(\Gamma^\circ)$  sont désignées par  $(\chi_1, \chi_2)$ . Soit alors  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\zeta \equiv 1$  au voisinage de 0,  $\text{Supp}(\zeta) \subset ] - 3\varepsilon, +3\varepsilon[$  et  $|\zeta'| \leq 1/2\varepsilon$ . Nous étendons l'application  $\Upsilon^u$  comme suit :

$$\overline{\Upsilon}^u := \begin{cases} \gamma^\circ(\chi_1) + \zeta(\chi_1)u(\chi_2)n^\circ, & \text{si } (\chi_1, \chi_2) \in TUB^\varepsilon(\Gamma^\circ), \\ (\chi_1, \chi_2), & \text{dans } \Omega^\circ \setminus TUB^\varepsilon(\Gamma^\circ) \end{cases} \quad (3.64)$$

Du coup,  $\overline{\Upsilon}^u$  est une application continue de  $\Omega^\circ$  dans  $\Omega^u$ . De plus si  $\|u\|_\tau < \varepsilon$  alors  $\overline{\Upsilon}^u$  est injective et sa matrice Jacobienne est inversible en tout point, donc d'après le Théorème d'inversion locale  $\overline{\Upsilon}^u$  est un  $C^\tau$ -difféomorphisme.

Ce prolongement induit une métrique sur  $\Omega^\circ$ , du coup nous notons  $\Delta_{(\mathbf{g}_u)}$  l'opérateur de Laplace-Beltrami associé. Avec ces notations la solution du problème (3.51) est égale à  $U^\circ \circ (\overline{\Upsilon}^u)^{-1}$ ,  $U^\circ$  étant solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta_{(\mathbf{g}_u)}^2 U^\circ = F \circ \overline{\Upsilon}^u & \text{dans } \Omega^\circ, \\ U^\circ = \Psi_1 \circ \overline{\Upsilon}^u & \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_\nu U^\circ = \Psi_2 \circ \overline{\Upsilon}^u & \text{sur } \partial\Omega, \\ U^\circ = \Psi_3 \circ \overline{\Upsilon}^u & \text{sur } \partial\mathcal{I}^\circ, \\ \partial_{n^\circ} U^\circ = \Psi_1 \circ \overline{\Upsilon}^u & \text{sur } \partial\mathcal{I}^\circ. \end{cases} \quad (3.65)$$

L'application  $\overline{\Upsilon}^u$  transforme (3.65) en le problème :

$$\begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{dans } \Omega^u, \\ U^u = \Psi_1 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_n U^u = \Psi_2 & \text{sur } \partial\Omega, \\ U^u = \Psi_3 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u, \\ \partial_{n^u} U^u = \Psi_1 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \end{cases} \quad (3.66)$$

Ceci vient du fait que l'application  $\overline{\Upsilon}^u$  induit un isomorphisme défini par :

$$\overline{\Upsilon}^{u*} : C^\tau(\Omega^u) \longrightarrow C^\tau(\Omega^\circ), \quad F \longmapsto \overline{\Upsilon}^{u*}(F) = F \circ \overline{\Upsilon}^u,$$

pourvu que  $u \in C^\tau(\Gamma^\circ)$  et  $\|u\|_\tau < \eta$ .

Toujours grâce aux estimations douces (3.46), (3.47), et dans le même esprit que le Lemme 2.1. de [118], il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $u \in C^\tau(\Gamma^\circ)$  avec  $\|u\|_\tau < \eta$ , telle que

$$\|F \circ \overline{\Upsilon}^u\|_\tau \leq C(\|F\|_\tau + \|u\|_\tau + \|F\|_1),$$

et une estimation indentique pour l'inverse  $\overline{\Upsilon}^{u*}$ .

Enfin rappelons une estimation des coefficients de l'opérateur bilaplacien-Beltrami.

Le lemme 2.3. de [118] assure l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $u$  telle que les coefficients de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u} := \Sigma(b_i^u \partial^i)$  vérifient :

$$\|b_i\|_\tau \leq C(1 + \|u\|_{\tau+2}).$$

Il en découle que les coefficients  $(a_i^u)_i$  du bilaplacien-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2$  vérifient :

$$\|a^u\|_\tau \leq C(1 + \|u\|_{\tau+4}). \quad (3.67)$$

La fin de la preuve du théorème 3.6.2 vient maintenant de l'application du Lemme 3.6.4. ♦

### 3.6.1.5 Démonstrations des Assertions 2 à 5

Comme notre but est d'appliquer le théorème de Nash-Moser dans un espace des fonctions de classe  $C^\infty$ , nous pouvons imposer pour la vérification de ces assertions :  $(u, F) \in \mathcal{O}'$  avec

$$\mathcal{O}' := \{(u, F) \in C^{8,\alpha}(\Gamma^\circ) \times C^{4,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{8+\alpha} \leq \eta, \|F\|_{4,\alpha} \leq \eta\}. \quad (3.68)$$

En particulier de (3.52) se déduit que la solution de (3.38) satisfait pour  $(u, F) \in \mathcal{O}'$  :

$$\|U^u\|_{8+\alpha} \leq \text{constante} \quad (3.69)$$

Pour simplifier introduisons l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{O}'' := \{u \in C^{8,\alpha}(\Gamma^\circ) \mid \|u\|_{8+\alpha} < \eta\}$$

Rappelons que  $\iota \geq \varsigma := 4 + \alpha$ .

Nous commençons maintenant la preuve des Assertions.

**Preuve de (A.2) :** ♦ Tout d'abord, puisque par définition  $U^u$  est solution de (3.38), nous avons grâce à (3.49) que :

$$\|\mathbf{T}[u, F]\|_\iota = \|\partial_{n^\circ}^2 U^u \circ \Upsilon^u\|_\iota \leq C_1 \left( \|U^u\|_{\iota+2} + \|u\|_\iota \right),$$

où (3.69) a été utilisée pour supprimer le facteur  $\|U^u\|_3$  devant le second terme. Puis de (3.52) suit l'estimation voulue :

$$\|\partial_{n^\circ}^2 U^u \circ \Upsilon^u\|_\iota \leq c_0 \left( \|F\|_{\iota-2} + \|u\|_{\iota+2} + 1 \right). \quad \blacklozenge$$

**Preuve de (A.3) :** ♦ Appliquons de nouveau (3.49)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}[u, F_1] - \mathbf{T}[u, F_2]\|_{\varsigma-2} &= \|(\partial_{n^\circ}^2 U_1^u - \partial_{n^\circ}^2 U_2^u) \circ \Upsilon^u\|_{\varsigma-2} \\ &\leq C_0 \left( \|\partial_{n^\circ}^2 U_1^u - \partial_{n^\circ}^2 U_2^u\|_{\varsigma-2} + \|\partial_{n^\circ}^2 U_1^u - \partial_{n^\circ}^2 U_2^u\|_1 \|u\|_{\varsigma-2} \right) \\ &\leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\varsigma, \text{ avec (3.52), ce qui est le résultat attendu. } \blacklozenge \end{aligned}$$

**Preuve de (A.5) :** ♦ Conformément à la définition de  $\ell_{u,F} := \frac{1}{L_{u,F}}$ , en choisissant  $\eta > 0$  de façon ad hoc, nous pouvons nous arranger pour avoir

$$\forall (u, F) \in \mathcal{O}', \quad \inf_{X \in \Gamma^\circ} \left( -F \circ \Upsilon^u \right) \geq \delta > 0.$$

C'est alors qu'il vient, de (3.48), en prenant  $F(t) = t^{-1}$  :

$$\left\| \frac{1}{L_{u,F}} \right\|_\iota \leq C \left( 1 + \|L_{u,F}\|_\iota \right).$$

D'autre part, grâce l'estimation (3.50) pour  $h^u$ , puis par (3.46) pour traiter le produit, (3.68) pour éliminer les termes négligeables de  $u$  et  $F$ , et (3.49) pour estimer la norme  $\|\cdot\|_{\iota+3}$  de  $U^u$  la solution de (3.38), nous concluons que :

$$\|L_{u,F}\|_\iota \leq C \left( 1 + \|F\|_{\iota-1} + \|u\|_{\iota+3} \right)$$

et

$$\|\ell_{u,F} w\|_\iota \leq C \left[ \|w\|_\iota + (\|(u, F)\|_{\iota+3}) \|w\|_0 \right]. \quad \blacklozenge$$

**Lemme 3.6.5** Si  $U^u$  est solution de (3.38), alors il existe  $C_3 > 0$  tel que :

$$\|\partial_u \mathbf{T}[u, F] - L_{u,F}\|_{\varsigma-1} \leq C_3 \|\mathbf{T}[u, F]\|_\varsigma \quad (3.70)$$



**Preuve du Lemme (3.6.5) :** ♦ Il s'agit d'observer que  $U^u$  est solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{sur } \Omega^u, \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega, \\ U^u = 0 & \text{sur } \Gamma^u, \\ \partial_{n^\circ} U^u = 0 & \text{sur } \Gamma^u, \\ \partial_{n^u}^2 U^u = (\hbar^u) \partial_{n^\circ}^2 U^u & \text{sur } \Gamma^u. \end{cases} \quad (3.71)$$

Ici  $n^u$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Gamma^u$ . Nous allons calculer  $\partial_{n^\circ}^3 U^u$  directement à partir des données du problème de Cauchy (3.71) ci-dessus, en ne supposant pas *a priori* que  $\mathsf{T}[u, F] = 0$  sur  $\Gamma^u$ . Le problème (3.71) admet une solution unique en vertu du théorème de Holmgren<sup>12</sup>. Bien évidemment nous savons  $\partial_{n^\circ}^3 U^u \circ \Upsilon^u$  est égal à  $\mathsf{L}_{u,F}$  si nous imposons le raccord des courbures. Le résultat se déduit d'une estimation de Schauder de  $W$  solution de (3.44). ♦

**Preuve de (A.4) :** ♦ Pour démontrer (A.4) nous allons avoir besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.6.6** Soit  $W$  une fonction sur  $\mathbb{R}^2$  définie sur un  $\eta$ -voisinage de  $\Gamma^\circ$  et soit  $1 \leq \iota \leq 8 + \alpha$ . Alors il existe  $C_4 > 0$  tel que pour  $u, u + w \in \mathcal{O}''$  :

$$\|(\partial_{n^\circ} W) \circ \Upsilon^{u+w} - (\partial_{n^\circ} W) \circ \Upsilon^u - w(\partial_{n^\circ}^2 W) \circ \Upsilon^{u+w}\|_\iota \leq C_4 \|W\|_{\iota+4} \|w\|_\iota^2 \quad (3.72)$$

**Preuve du Lemme 3.6.6** ♦ Pour  $0 \leq t \leq 1$  soit  $\Upsilon[., t] := \Upsilon^{u+tw}$ . Par une intégration par parties, le membre de gauche de (3.72) est égal

$$w^2 \int_0^1 (1-t)(\partial_{n^\circ}^3 W) \circ \Upsilon[., t] dt.$$

Par l'estimation de composition par une application lisse, il vient qu'il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $u, w, W$  telle que :

$$\|w^2 \int_0^1 (1-t)(\partial_{n^\circ}^3 W) \circ \Upsilon[., t] dt\|_\iota \leq C \overbrace{\left( \|\partial_{n^\circ}^3 W\|_\iota + (\|u\|_\iota \|w\|_\iota) \|\partial_{n^\circ}^3 W\|_1 \right)}^{\leq \text{Constante} \|W\|_{\iota+4}} \|w\|_\iota^2,$$

ce qui fini la preuve du Lemme 3.6.6 ♦

Commençons par retraduire (A.4), avec  $(u, F), (u + w, F) \in \mathcal{O}'$  :

$$\|(\partial_{n^\circ}^2 W) \circ \Upsilon^{u+w} - (\partial_{n^\circ}^2 U) \circ \Upsilon^u - \mathsf{L}_{u,F} w\|_{\varsigma-2} \leq c_2 \left( \|\mathsf{T}[u, F]\|_\varsigma \|w\|_\varsigma + \|w\|_\varsigma^2 \right) \quad (3.73)$$

Posons  $U^u$  (resp.  $U^{u+w}$ ) la solution de (3.38) pour  $(u, F)$ , (resp. pour  $(u + w, F)$ .)

La prochaine étape est d'appliquer le Lemme 3.6.6, pour ce faire, prolongeons  $U$  en une

<sup>12</sup> Nous renvoyons à [47] pour un énoncé plus général et une preuve du théorème d'unicité de Holmgren.

fonction  $\bar{U}$  définie dans un  $\eta$ -voisinage de  $\Gamma^\circ$ . Ce qui a pour effet d'augmenter la norme de  $U$  d'au plus un facteur constant ; donc (3.72) sera toujours valide. Le terme de gauche de (3.73) est :

$$\begin{aligned} & (\partial_{n^\circ}^2 W) \circ \Upsilon^{u+w} - (\partial_{n^\circ}^2 U) \circ \Upsilon^u - \mathbf{L}_{u,F} w = \\ & \overbrace{(\partial_{n^\circ}^2 U^{u+w}) \circ \Upsilon^{u+w} - (\partial_{n^\circ}^2 \bar{U}) \circ \Upsilon^{u+w}}^{(\heartsuit)} + \overbrace{(\partial_{n^\circ}^2 \bar{U}) \circ \Upsilon^{u+w} - (\partial_{n^\circ}^2 \bar{U}) \circ \Upsilon^u - \mathbf{L}_{u,F} w}^{(\heartsuit\heartsuit)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Par le Lemme 3.6.6, la  $(\varsigma - 2)$ -norme du second terme de (3.74) vérifie :

$$\|(\heartsuit\heartsuit)\|_{\varsigma-2} \leq \text{Constante} \|(\partial_{n^\circ}^3 \bar{U}) \circ \Upsilon^u - \mathbf{L}_{u,F} w\|_{\varsigma-2} + \|(\partial_{n^\circ}^2 \bar{U}) \circ \Upsilon^u\|_{\varsigma+2} \|w\|_{\varsigma-2} \quad (3.75)$$

terme qui est lui même borné par le second membre de (3.73), grâce au Lemme 3.6.5 et (3.69).

Procédons à l'estimation de  $(\heartsuit)$ . Par (3.49) il suffit d'obtenir une estimation en  $(\varsigma - 2)$ -norme de  $\partial_{n^\circ}^2 (U^{u+w} - \bar{U})$ , ou, en fait en  $(\varsigma - 1)$ -norme de  $(U^{u+w} - \bar{U})$ . Elle va venir de (3.52), et donc nous devons calculer le champ de forces pour le problème au limites (3.51) sur  $\Omega^{u+w}$  ayant pour solution  $(U^{u+w} - \bar{U})$ . Le membre de droite du premier terme de (3.51) doit être  $F - \bar{F}$ , où  $\bar{F} := \Delta^2 \bar{U}$ . Toutefois, il est à remarquer que  $F = \bar{F}$  sur  $\Omega^{u+w} \cap \Omega^u$ . Or puisque

$$\text{dist}(\Gamma^u, \Gamma^{u+w}) \leq \|w\|_0,$$

alors

$$\|F - \bar{F}\|_{\varsigma-4} \leq \text{Constante} \|w\|_0^2 \|F - \bar{F}\|_{\varsigma} \leq \text{Constante} \|w\|_0^2,$$

où la seconde majoration vient de la borne (3.69) et de l'observation suivante :

$$\|F - \bar{F}\|_{\varsigma} \leq \|F\|_{\varsigma} + \|\bar{F}\|_{\varsigma} = \|\Delta^2 U\|_{\varsigma} + \|\Delta^2 \bar{U}\|_{\varsigma} \leq \|U\|_{\alpha+8} + \|\bar{U}\|_{\alpha+8}.$$

Puisque les données de Neumann sont  $\partial_{n^\circ} (U^{u+w} - \bar{U})|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\partial_{n^\circ} (U^{u+w} - \bar{U})|_{\Gamma^{u+w}} = \partial_{n^\circ} (-\bar{U})|_{\Gamma^{u+w}}$ , et comme  $\partial_{n^\circ} \bar{U} = 0$  au voisinage de  $\Gamma^u$ , alors du Lemme 3.6.6 découle :

$$\begin{aligned} & \|\partial_{n^\circ} \bar{U} \circ \Upsilon^{u+w}\|_{\varsigma-1} = \|\partial_{n^\circ} \bar{U} \circ \Upsilon^{u+w} - \partial_{n^\circ} \bar{U} \circ \Upsilon^u\|_{\varsigma-1} \\ & \leq \text{Constante} \left( \|\partial_{n^\circ}^2 \bar{U} \circ \Upsilon^u\|_{\varsigma-1} \|w\|_{\varsigma-1} + \|\partial_{n^\circ} \bar{U}\|_{\varsigma+3} \|w\|_{\varsigma-1}^2 \right). \end{aligned}$$

Or  $\|\partial_{n^\circ} \bar{U}\|_{\varsigma+3} \leq \|\bar{U}\|_{\varsigma+4} \leq \text{Constante}$  grâce à (3.69), finalement

$$\|\partial_{n^\circ} \bar{U} \circ \Upsilon^{u+w}\|_{\varsigma} \leq \text{Constante} (\|T[u, F]\|_{\varsigma} \|w\|_{\varsigma} + \|w\|_{\varsigma}^2),$$

ce qui achève la preuve de (A.4) ♦

**Finalement ...** Comme il a été annoncé à la Proposition 3.6.1, la dernière chose à voir pour clore cette démonstration est que  $U^u > 0$  sur  $\Omega^u$ .

**Proposition 3.6.6** *Soit  $(u, F)$  satisfaisant  $T[u, F] = 0$ , et soit  $U^u$  solution de (3.38). Alors pour  $\eta > 0$  suffisamment petit,  $U^u > 0$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$ .*

**Preuve de la Proposition 3.6.6 :** ♦ Nous avons  $U^\circ = 0$ ,  $\partial_{n^\circ} U^\circ = 0$ ,  $\partial_{n^\circ}^2 U^\circ = (\hbar^u) \partial_{n^\circ}^2 U^\circ \circ \Upsilon^u$  et  $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ = L_{u,F}$  sur  $\Gamma^u$ . En effectuant un développement de Taylor dans le voisinage tubulaire de  $\Gamma^\circ$  défini par (3.40), en un point  $X \in \Gamma^\circ$  fixé, et en la variable  $t$  (portée par le vecteur  $n^\circ$ ) :

$$\begin{aligned} 0 \leq U^\circ(X, t) &= \overbrace{U^\circ(X, 0)}^{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} U^\circ(X, 0)}^{=0} + \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 U^\circ(X, 0)}^{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_{n^\circ}^3 U^\circ(X, 0) \\ &\quad + \frac{t^4}{4!} \partial_{n^\circ}^4 U^\circ(X, 0) + o(t^5). \end{aligned}$$

Il découle que  $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ > 0$  sur  $\Gamma^\circ$  puisque  $\Gamma^\circ$  est compacte et que  $\partial_{n^\circ}^4 U^\circ = F^\circ$  sur  $\Gamma^\circ$ , d'après la Proposition 3.6.2, avec  $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$ . En Conséquence du Lemme (3.6.5) en choisissant  $\eta > 0$  suffisamment petit, il est possible d'avoir

$$\inf_{X \in \Gamma^\circ} L_{u,F}(X) \geq \delta > 0,$$

avec  $\delta$  indépendant du couple  $(u, F) \in \mathcal{O}'$ . Au vu de (3.70), et de la borne uniforme (3.69)  $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ$  est positive dans un voisinage  $\mathcal{V}^u$  de  $\Gamma^u$ , dont la taille peut être choisie indépendamment de  $(u, F)$ . Et grâce à la formule de Taylor (3.41) :  $U^\circ$  est positif sur  $\mathcal{V}^u$ . Puis d'autre part, la solution  $U^\circ$  est positive sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^\circ$ , donc

$$\inf_{X \in \Omega \setminus \mathcal{V}^u} U^\circ(X) \geq \delta > 0.$$

Ainsi par continuité  $U^\circ$  reste strictement positif sur  $\Omega^\circ \setminus \mathcal{V}^u$ , donc sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$ . ♦

Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.6.1. ♦

### 3.6.2 Théorème de stabilité : commentaires et extensions

Il est possible d'étendre le Théorème précédant pour des obstacles lisses mais non plats, et relaxer l'hypothèse de non dégénérescence. En fait nous allons donner des conditions sur la zone assurant l'existence d'un effort tranchant sur la frontière libre, si les données sont suffisamment régulières, ce qui permet alors de se ramener à la preuve du Théorème 3.6.1. Comme nous l'avons rappelé plus haut, les commentaires figurant dans [4] laissent à penser que la géométrie de la zone de contact influence de façon notoire la stabilité de la solution, nous en donnons une confirmation à travers le Théorème suivant.

**Théorème 3.6.4** Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  et  $G = 0$  avec  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ . Considérons le problème (3.2) et supposons que pour  $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , les trois conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Delta^2 \psi - F^\circ \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}(F^\circ). \\ (ii) \quad & \partial_{n^\circ}^4 \psi - F^\circ \geq \delta_1 > 0 \text{ sur } \partial\mathcal{I}(F^\circ). \\ (iii) \quad & \mathcal{I}^\circ := \mathcal{I}(F^\circ) \text{ soit une surface lisse à bord, (i.e } C^\infty). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\mathcal{I}(F)$  est une surface lisse difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

**Preuve du Théorème 3.6.4 :** ♦ La preuve est la même que celle qui précède avec le changement de variables  $\bar{U}^u = U^u - \psi$ , à ceci près qu'il faut s'assurer de l'inversibilité de l'opérateur  $L_{u,F}$ , ce qui revient à vouloir  $\partial_{n^\circ}^3 \bar{U}^\circ > 0$  sur  $\Gamma^u$ . Or dans le voisinage tubulaire de  $\Gamma^\circ$  défini par (3.40), nous avons le développement de Taylor de  $\bar{U}^\circ$  en la variable  $t$ , en un point  $X$  fixé :

$$\begin{aligned} 0 < \bar{U}^\circ(X, t) = & \overbrace{\bar{U}^\circ(X, 0)}^{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} \bar{U}^\circ(X, 0)}^{=0} + \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 \bar{U}^\circ(X, 0)}^{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_{n^\circ}^3 \bar{U}^\circ(X, 0) \\ & + \frac{t^4}{4!} \partial_{n^\circ}^4 \bar{U}^\circ(X, 0) + o(t^4). \end{aligned}$$

Ici  $\partial_{n^\circ}^4 \bar{U}^\circ(X, 0) = (F - \partial_{n^\circ}^4(\psi))(X, 0) < 0$  d'après (ii), ce qui permet de conclure, par compacité, à la stricte positivité de  $\partial_{n^\circ}^3 \bar{U}^\circ$  sur tout  $\Gamma^\circ$ . En remplaçant  $U^u$  par  $\bar{U}^u$  dans le lemme 3.6.5, on obtient, selon la preuve du Proposition 3.6.6, la stricte positivité donc l'inversibilité de l'opérateur  $L_{u,F}$ . ♦

**Commentaires 3.6.3** • Le Théorème 3.6.4 assure que la frontière libre est de classe  $C^\infty$  par rapport au champ de forces  $F \in C^\infty(\Omega)$ , mais cela n'implique directement pas la dérivabilité de la solution  $U$  par rapport à un champ de forces  $F \in L^2(\Omega)$ .

• La généralisation du théorème 3.6.4 dans l'esprit des Théorèmes 2.7.3, 2.7.4, de stabilité locale obtenus par L. Caffarelli pour l'opérateur laplacien dans le problème (2.2) semble difficile. En effet ils se basent sur la régularité de la mesure de réaction qui est  $L^2(\Omega)$  pour une force  $L^2(\Omega)$  avec un obstacle et un domaine suffisamment régulier, ce qui faux dans le cas du problème d'obstacle pour le bilaplacien (3.2). Cependant, nous pouvons imaginer que l'étude de continuité entreprise par Adams [3] pour le problème (3.2) pourrait permettre d'établir avec des mesures de réaction  $H^{-1}(\Omega)$  l'équivalent des Théorèmes de stabilité 2.7.3, et 2.7.4. Mais ceci représente un gros travail d'analyse. Une des pistes d'exploration possible serait l'utilisation astucieuse de formulations hamiltoniennes comme l'a fait A. HERMANT [67] pour des problèmes de commande optimale avec une contrainte sur l'état scalaire du second ordre et une commande scalaire sous une condition assurant l'existence locale de solution. Cette étude englobe le cas du problème de commande optimale associé au problème de contact pour une poutre linéairement élastique soumise à un champ de forces  $L^\infty$ .

• L'hypothèse (i) de contact strict ( $\text{Supp}(\mu(F^\circ)) = \mathcal{I}(F^\circ)$ ) du Théorème 3.6.4 ne permet pas d'assurer, en général, la satisfaction de l'hypothèse (ii), (sauf si  $\Delta^2 \psi = 0$ ). Ces deux hypothèses (i) et (ii) sont indispensables pour assurer la stabilité de la zone de contact  $\mathcal{I}(F^\circ)$ , comme le montre l'exemple 3.6.1.

**Exemple 3.6.1** Considérons une plaque élastique circulaire  $\Omega = \mathbb{B}^2(0, 1)$  encastrée sur son bord, soumise à une force  $r \mapsto F_t(r) = -t$ , au dessus d'un obstacle parabolique

$$r \mapsto \psi(r) := (-1 - 2r^4).$$

Pour  $64 \leq t < 128$ , la force  $F_t$  est suffisamment intense pour qu'il y ait contact, la zone de contact est (par construction) axisymétrique. Elle est nécessairement d'intérieur vide, d'après la Remarque 3.4.1, puisque l'hypothèse de non dégénérescence n'est pas vérifiée. Donc puisqu'elle ne peut pas être réduite à un point, d'après la Proposition 3.2.3, c'est un

---

cercle de rayon  $R$ . En se souvenant du théorème 3.4.1, affirmant que la zone de contact est simplement connexe sous l'hypothèse  $\Delta^2\psi - F_t \geq 0$  sur  $\Omega$ , nous concluons que la zone de contact est un disque de centre 0 et de rayon  $R$  dès que  $t \geq 128$ , (voir figure (4.9)). Ainsi l'application de la force  $F_t$  qui est  $< 0$  sur tout  $\Omega$ , agit comme stabilisateur de la plaque, et  $R_t$  croît quand  $t$  croît. Le cas limite  $\Delta^2\psi = F_{t_c}$  pour la charge critique  $t_c = 128$  est géométriquement instable. Nous approfondirons l'étude de cet exemple au chapitre suivant.

---

## Chapitre 4

# LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE PLAQUE EN PETITES DEFORMATIONS : ETUDE DE SENSIBILITE

*La Vérité que l'on nomme n'est pas la Vérité Absolue.  
Lao Zi · Dao De Jing*

Comme nous l'avons signalé, la solution du problème de l'obstacle pour une poutre ou une plaque peut être vue comme la projection de la solution non contrainte sur le convexe des déplacements cinématiquement admissibles du problème contraint. Mettre en place une méthode de continuation dans l'esprit de ce qui a été présenté dans l'Introduction, nécessite d'explicitier la dérivée du projecteur métrique sur un convexe de  $\mathbb{H}^2$ . Mais l'analyse de sensibilité du projecteur métrique sur un convexe de  $\mathbb{H}^2$  est très délicate [39], [107], et est largement inexplorée. Le sujet du présent chapitre est la discussion des propriétés différentielles des inéquations variationnelles décrivant la flexion d'une poutre et d'une plaque en présence d'un obstacle et paramétrées par le champ de forces appliqué. Très récemment, A. SHAPIRO [115] a traité l'analyse de sensibilité d'inéquations variationnelles en *dimension finie*, en reformulant ces inéquations en terme de problèmes optimisation sous contrainte et appliquant la machinerie de la théorie de l'analyse par perturbation au second ordre exposée dans [20]. Dans [21] et [22], F. BONNANS & A. HERMANT se sont intéressés à l'existence, la stabilité et la sensibilité pour les problèmes de commande optimale avec un contrôle scalaire et une contrainte sur l'état, par une « *analyse au second ordre* ». En collaboration avec le professeur F. Bonnans nous nous sommes inspirés de cette situation abstraite pour déduire l'analyse de sensibilité et le calcul des dérivées directionnelles pour le problème d'obstacle pour une poutre sous les conditions que l'ensemble de coïncidence ait un nombre fini de composantes connexes et contact tangent aux points isolés. Puis nous avons étendu cette étude au cas de la plaque, avec des conditions sur les courbures de la plaque et de l'obstacle. Nous présentons ci-dessous quelques exemples concrets servant de guide à la compréhension et l'intuition. En particulier, nous démontrons quelques résultats concernant l'évolution de l'ensemble de coïncidence pour le problème de l'obstacle pour une poutre en flexion avec des conditions d'appui simple ou d'encastrement au bord en nous basant sur les idées développées dans [39]. Ce qui nous permet d'illustrer le phénomène d'instabilité que génèrent les points de contacts isolés essentiels d'ordre 2. Ces cas pathologiques mettent en lumière des différences profondes avec le problème (2.2), et ils doivent être pris en compte dans nos futures tentatives pour comprendre ce que devient la conjecture de Schaeffer pour le problème (3.2).

## 4.1 Résultats de différentiabilité en présence d'obstacle pour une poutre en flexion

Nous rappelons à présent l'étude de A. CIMETIÈRE & A. LÉGER [39] portant sur l'évolution de la zone de contact et la dérivabilité de la solution du problème de l'obstacle pour une poutre en appui simple<sup>1</sup>.

En dimension 1 l'approche est grandement simplifiée car nous pouvons donner une équation implicite de la frontière libre grâce à la solution d'un problème construit avec la même poutre en flexion soumise à un champ de forces  $f$  mais en l'absence d'obstacle. Nous traitons le cas de la poutre encastree au dessous d'un obstacle lisse de forme quelconque, et énonçons l'équivalent du Théorème 3.6.4, ce qui permet de s'assurer que les conditions d'encastrement et de signe sur le champ de forces suffisent à l'obtention du résultat géométrique (pour des données lisses) de stabilité espéré, avec un obstacle non-nécessairement plat.

### 4.1.1 Cas d'une poutre en appui simple

Considérons une poutre élastique en appui simple, dont la configuration de référence sans contrainte est le segment  $\overline{\Omega} := [0, 1]$ . Cette poutre est placée au dessus d'un obstacle  $\psi$  rigide et immobile. Sa flexion sous une charge  $f \in L^2(0, 1)$  est donc limitée par  $\psi$ , et la flèche  $u$  à l'équilibre est la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k} = \{v \in \mathbb{H}^2(0, 1) \cap \mathbb{H}_0^1(0, 1) \mid v \geq \psi\}, \\ \int_0^1 u''(v - u)'' dx \geq \int_0^1 f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{k}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Il est connu [82] que la solution de (4.2) est unique et appartient à  $\mathbb{H}^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ .

---

<sup>1</sup> L'équation d'équilibre d'une poutre linéairement élastique placée au dessus d'un obstacle rigide et immobile  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (décrit par son équation cartésienne  $x_2 = \psi(x_1)$ ), s'écrit formellement, dans le cas où le contact a lieu *sans frottement* :

Trouver  $u$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(4)} = f + \mu \text{ dans } \Omega, \\ u \geq \psi, \mu \geq 0, (u - \psi)\mu = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{avec (1.42) ou (1.43).} \end{array} \right. \quad (4.1)$$



**Théorème 4.1.1** [39] Dans le problème (4.2), considérons un obstacle  $\psi = -1$ , et une force  $f_0 \in L^2(0, 1)$  telle que :

(i)  $f_0$  strictement dirigée vers l'obstacle ( $-f_0 \geq \delta_0 > 0$  sur  $]0, 1[$ );

(ii)  $f_0$  symétrique par rapport au milieu de la poutre;

(iii)  $f_0$  suffisamment intense pour que la zone de contact soit de mesure non nulle, i.e.  $\mathcal{I}(f_0) = [y_0, 1 - y_0]$ ,  $0 < y_0 < 1/2$ ;

Soit  $f_t := f_0 + th$  une famille de chargements, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et  $h \in L^2(0, 1)$ .

Alors :

► La fonction définissant la frontière de la zone de contact  $t \mapsto y(t)$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $t = 0$ .

► L'application qui à  $t$  associe  $u_t$ , la solution de (4.2) pour le chargement  $f_t$  est Gâteaux-différentiable, sa dérivée en  $t = 0$  est la fonction  $z_0$  définie sur  $]0, 1[$ , symétrique, nulle sur la zone de contact et solution du problème suivant sur  $[0, y_0]$  (partie gauche du domaine où le contact n'a pas lieu sous  $f_0$ ) :

$$\begin{cases} z_0^{(4)} = h, & \text{sur } ]0, y_0[, \\ z_0(0) = 0 = z_0''(0) = z_0'(y_0) = z_0(y_0) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

**Remarque 4.1.1** Quand le chargement n'est pas dirigé en tout point vers l'obstacle l'hypothèse (i) n'est plus valide, pourtant si le contact est *franc* le théorème est toujours vrai. Mécaniquement cela peut être réalisé en supposant que les moments résultants du chargement  $f_0$  sur le complémentaire de la zone de contact aient un signe convenable et que le signe du chargement satisfasse à l'équilibre global (i.e. que la réaction  $\mu(f_0) = u^{(4)} - f_0$  soit positive).

**Théorème 4.1.2** [39] Avec les notations ci-dessus, les résultats de dérivabilité perdurent si à la place de (i) nous imposons :

$$(i') \int_0^{y_0} x f_0(x) dx < 0 \quad \text{et} \quad \int_{1-y_0}^1 (1-x) f_0(x) dx < 0;$$

$$(i'') \quad f_0 < 0 \quad \text{sur} \quad [y_0, 1 - y_0].$$

**Commentaires 4.1.1** Lorsque la condition  $f_0 < 0$  sur la zone de contact  $]y_0, 1 - y_0[$  n'est pas satisfaite la différentiabilité au sens de Gâteaux n'est pas garantie. Et dans ce cas seule la dérivée *faible* peut exister (c.f. Théorème (4.3.1)).

Le fait de devoir imposer (i') et (i'') peut paraître surprenant au regard du Théorème 3.6.4, qui garantit la dérivabilité de la frontière libre sous la seule hypothèse de contact franc. Nous proposons une nouvelle version du Théorème 4.1.2, en montrant que dans le cas d'un chargement  $C^\infty$  l'hypothèse (i'') astreint les *efforts tranchants* au bord de la zone à être strictement positifs (i.e.  $u^{(3)}(y_0), u^{(3)}(1 - y_0) > 0$ ).

**Théorème 4.1.3** Avec les notations ci-dessus, pour  $f_0 \in C^\infty([0, 1])$   $-f_0 \geq \delta_0 > 0$  sur la zone de contact  $[y_0, 1 - y_0]$  alors l'application  $t \mapsto y_t$  est de classe  $C^\infty$  en  $t = 0$ , pourvu que  $f_t := f_0 + th \in C^\infty([0, 1])$  avec  $h \in C^\infty([0, 1])$ .

**Preuve :** ♦ Choisissons  $f := f_t \in C^\infty([0, 1])$  satisfaisant (ii) et (iii) du Théorème (4.1.1). Alors sur le bord gauche  $[0, y]$  où il n'y a pas contact  $u$  vérifie :

$$\begin{cases} u^{(4)} = f \\ u''(y) = u(0) = u''(0) = 0; \quad u(y) = -1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Observons, comme dans [39], que le chargement  $f$  peut être éliminé de ce problème par l'introduction de la solution  $u^b$  du problème de flexion bilatérale sur  $\mathcal{I}_0$  d'une poutre simplement appuyée :

$$(u^b)^{(4)} = f, \quad (u^b)''(1) = (u^b)''(0) = u^b(1) = u^b(0) = 0. \quad (4.5)$$

Grâce à la régularité  $C^2([0, 1])$  de  $u$  nous savons que  $u''(y) = 0$ , et nous obtenons la relation suivante, pour  $x \in [0, y]$  :

$$u(x) = u^b(x) - \left( \frac{(u^b)''(y)}{6y} \right) x^3 + \left( -1 - u^b(y) + \frac{y}{6} (u^b)''(y) \right) x,$$

et donc

$$u'''(x) = (u^b)'''(x) - \frac{(u^b)''(y)}{y}.$$

D'autre part en effectuant un développement de Taylor sur l'intervalle  $[0, y]$  où il n'y a pas contact ( $u > \psi = -1$ ) nous obtenons, puisque le contact est d'ordre 2, et  $u \in C^\infty([0, y])$

$$0 < (u - \psi)(x) = \frac{(x - y)^3}{3!} u^{(3)}(y) + \frac{(x - y)^4}{4!} u^{(4)}(y) + o((x - y)^4).$$

Grâce à la condition de signe :  $-f_0 \geq \delta_0 > 0$  sur la zone de contact  $[y, 1 - y]$ , il vient par continuité que  $u^{(4)}(y) = f(y) < 0$  donc

$$u'''(y) > 0.$$

En outre de l'élimination de  $f$ , en tenant compte de  $u'(y) = 0$ , nous tirons pour la frontière  $y$  l'équation implicite :

$$\frac{1}{3} y^2 (u_t^b)''(y) - y (u_t^b)'(y) + (u_t^b)(y) + 1 = 0$$

A présent le Théorème des fonctions implicites assure que  $t \mapsto y_t$  est de classe  $C^\infty$  en  $t = 0$ , si

$$y_0 (u_0^b)'''(y_0) - (u_0^b)''(y_0) > 0,$$

ce qui est vrai puisque  $u_0'''(y_0) = (u_0^b)'''(y_0) - \frac{(u_0^b)''(y_0)}{y_0} > 0$ . ♦

### 4.1.2 Cas d'une poutre encastrée au dessus d'un obstacle lisse

Pour une poutre encastrée, occupant au repos un segment  $\Omega$ , dont la flexion sous une charge  $f \in L^2(\Omega)$  est limitée par un obstacle rigide  $\psi$ , la flèche  $u$  à l'équilibre est la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k}_\psi = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq \psi\}, \\ \int_{\Omega} u''(v - u)'' dx \geq \int_0^1 f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{k}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

**Remarque 4.1.2** Il est connu [82] que la solution de (4.6) est unique et appartient à  $\mathbb{H}^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ .

Examinons comme ci-dessus, la frontière libre pour le problème de l'obstacle de la poutre encastrée (4.6)

**Théorème 4.1.4** Dans le problème (4.6) considérons  $\Omega := ]0, 1[$ , l'obstacle  $\psi$  lisse symétrique par rapport au milieu de la poutre tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , et une force  $f_0 \in L^2(0, 1)$  tel que :

- (i)  $f_0$  vérifie l'hypothèse de non-dégénérescence :  $\psi^{(4)} - f_0 \geq \delta_0 > 0$  sur  $[0, 1]$  ;
- (ii)  $f_0$  suffisamment intense pour que la zone de contact soit de mesure non nulle, i.e.  $\mathcal{I}(f_0) = [y_0, 1 - y_0]$ ,  $y_0 > 0$  ;
- (iii)  $f_0$  symétrique par rapport au milieu de la poutre ;

Soit  $f_t := f_0 + th$  une famille de chargements, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et  $h \in L^2(0, 1)$ . Soient  $u_0$  et  $u_t$  les solutions de (4.6) correspondantes aux chargements  $f_0$  et  $f_t$ , les frontières associées de la zone de contact sont notées  $y_0$  et  $y_t$ .

Alors :

► La fonction définissant la frontière de la zone de contact  $t \mapsto y(t)$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $t = 0$ , (respectivement  $C^\infty$  si  $f_t$  et  $h$  sont de classe  $C^\infty$ ).

► L'application  $t \mapsto u_t$  est Gâteaux-différentiable, sa dérivée en  $t = 0$  est la fonction  $z_0$  définie sur  $]0, 1[$ , symétrique, égale à  $\psi$  sur la zone de contact et solution du problème suivant sur  $[0, y_0]$  (partie gauche du domaine où le contact n'a pas lieu sous  $f_0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0^{(4)} = h, \quad \text{sur } ]0, y_0[, \\ z_0(0) = z_0'(0) = 0, \\ z_0'(y_0) = z_0(y_0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

**Preuve :** ♦ Choisissons  $f$  comme indiqué dans le Théorème ci-dessus. Alors sur le segment gauche  $[0, y]$  où il n'y a pas contact le problème de flexion est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(4)} = f \\ u'(y) = \psi'(y) \\ u(y) = \psi(y) \\ u_0(0) = u'(0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Observons que le chargement  $f$  peut être éliminé de ce problème par l'introduction de la solution  $u^b$  du problème de flexion bilatérale sur  $[0, 1]$  d'une poutre encastrée :

$$(u^b)^{(4)} = f, \quad (u^b)'(1) = (u^b)'(0) = u^b(1) = u^b(0) = 0. \quad (4.9)$$

Soient  $\alpha, \beta$  réels, de (4.8) et (4.9) nous tirons les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(x) = u^b(x) + \alpha x^3 + \beta x^2, & x \in [0, y] \\ \psi(y) = u^b(y) + \alpha y^3 + \beta y^2 \\ \psi'(y) = (u^b(y))' + 3\alpha y^2 + 2\beta y \\ \psi''(y) = (u^b(y))'' + 6\alpha y + 2\beta \end{cases} \quad (4.10)$$

Après des opérations élémentaires nous obtenons la caractérisation suivante pour la frontière libre  $y$  actuelle :

$$0 = (u^b - \psi)(y) - \frac{2y}{3}(u^b - \psi)'(y) + \frac{y^2}{6}(u^b - \psi)''(y) \quad (4.11)$$

Voyons à partir de cette équation comment la zone de contact évolue sous un chargement additionnel  $th$ . Notons  $u_0^b$  et  $h^b$  les solutions aux problèmes (4.8) et (4.9) respectivement, pour les chargements  $f_0$  et  $h$  respectivement. La frontière libre  $y := y_t$  actuelle est solution de l'équation  $\mathcal{G}(y, t) = 0$ , avec  $\mathcal{G}$  définie par :

$$\mathcal{G}(y, t) = (u_0^b - \psi + th^b)(y) - \frac{2y}{3}(u_0^b - \psi + th^b)'(y) + \frac{y^2}{6}(u_0^b - \psi + th^b)''(y)$$

Nous vérifions immédiatement :

$$\mathcal{G}_{,t}(y_0, 0) = -\frac{1}{3} \left( -(u_0^b - \psi)'(y_0) + y_0(u_0^b - \psi)''(y_0) - \frac{y_0^2}{2}(u_0^b - \psi)'''(y_0) \right)$$

étudions le signe de cette quantité :

$$\left( -(u_0^b - \psi)'(y_0) + y_0(u_0^b - \psi)''(y_0) - \frac{y_0^2}{2}(u_0^b - \psi)'''(y_0) \right).$$

Si  $f_t$  et  $h$  sont de classe  $C^\infty$  ; en résolvant le système (4.10) ci-dessus, nous pouvons écrire que, pour  $x \in [0, y]$  :

$$u(x) = u^b(x) - \left( (\psi - u^b)'(y) - y(\psi - u^b)''(y) \right) \frac{x^3}{3y^2} + \left( (\psi - u^b)'(y) + \frac{y}{2}(\psi - u^b)''(y) \right) \frac{x^2}{y},$$

et donc

$$(\psi - u)'''(x) = (\psi - u^b)'''(x) - \frac{2}{y^2} \left( (\psi - u^b)'(y) - y(\psi - u^b)''(y) \right).$$

De l'hypothèse (i) toujours par un développement de Taylor sur l'intervalle  $[0, y_0]$  où il n'y a pas contact on déduit que  $(u - \psi)'''(y_0) > 0$  (resp.  $(u - \psi)'''(1 - y_0) > 0$ ), du coup

$$\mathcal{G}_{,t}(y_0, 0) \neq 0.$$

Remarquons également que si  $f_t \in L^2(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} & \left( -(u_0^b - \psi)'(y_0) + y_0(u_0^b - \psi)''(y_0) - \frac{y_0^2}{2}(u_0^b - \psi)'''(y_0) \right) \\ &= \int_0^{y_0} \frac{d}{d\tau} \left( -(u_0^b - \psi)'(\tau) + \tau(u_0^b - \psi)''(\tau) - \frac{\tau^2}{2}(u_0^b - \psi)'''(\tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$= - \int_0^{y_0} \frac{\tau^2}{2} (u_0^b - \psi)^{(4)}(\tau) d\tau = - \int_0^{y_0} \frac{\tau^2}{2} (f_0 - (\psi)^{(4)}(\tau)) d\tau > 0$$

d'après l'hypothèse (i), et donc de même  $\mathcal{G}_t(y_0, 0) \neq 0$ . Ainsi par application directe du Théorème des fonctions implicites on obtient que sous les hypothèses du Théorème 4.1.4, pour le chargement  $f_0$ , la frontière libre de la zone de contact  $t \mapsto y_t$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $t = 0$ , (respectivement  $C^\infty$  si  $f_t$  est de classe  $C^\infty$ ).

Il est possible de prouver la dérivabilité de  $u_t$  directement en établissant la convergence faible  $\frac{u_t - u_0}{t} \rightharpoonup z_0$ , et  $\|\frac{u_t - u_0}{t}\| \rightarrow \|z_0\|$ . Mais en fait il suffit d'invoquer le Théorème 4.4.8 puisque le contact franc sur un segment (non réduit à un point) nous assure la polyédricité d'après la Proposition 4.3.2. ♦

**Remarque 4.1.3** Nous établirons plus loin le même type de résultat de régularité pour le cas des plaques linéaires.

**Remarque 4.1.4** A. HERMANT [67] (Théorème 6.8) a également obtenu un résultat de stabilité des segments de contact via une certaine formulation hamiltonienne du problème de commande optimale traduisant (4.6). La démonstration est conduite dans le cas où l'état est dans l'espace  $\mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$  (i.e pour des forces  $L^\infty(\Omega)$ ) et pré-suppose la « stricte complémentarité uniforme » qui se traduit par l'hypothèse de non-dégénérescence  $f_0 > 0$  pp sur chaque segment de contact. Ce qui suggère la possibilité de fournir pour ce résultat d'autres techniques de preuve que celles que nous avons proposées concernant la stabilité de la zone contact.

## 4.2 Quelques exemples de l'évolution de la zone de contact en fonction du chargement

### 4.2.1 Un cas de non-différentiabilité du projecteur métrique de $\mathbb{H}^2$

L'exemple suivant de non C-différentiabilité d'un projecteur sur un convexe de  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ , m'a été aimablement communiqué par J. Sokolowski. Il ruine l'espoir d'utiliser directement les propriétés différentielles d'un projecteur sur un convexe de  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  pour construire un algorithme de continuation aussi simplement que dans le cas des inéquations variationnelles posées dans un convexe de  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ .

Nous ici utilisons les concepts de cône de support et critique selon les notations de l'Annexe B.

Soient  $\Omega := ]-1, +1[$ ,  $\mathbb{H} := \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle u|v \rangle := \int_\Omega u''v'' d\Omega$ . Soit

$q \in C^\infty(\Omega)$ ,  $0 \leq q(x) \leq 1$ ,  $q(-1) = q(1) = 0$ ,  $q' \neq 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $q(x) = 1$  pour  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Soit  $u_0 := \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(v_0)$  la projection de

$$v_0(x) = \frac{x^2}{2}q(x) - \frac{x^3}{6}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{3}$$

sur le convexe  $\mathbb{K} = \{v \in \mathbb{H} / v \geq 0\}$ . Elle est donnée par

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2}q(x).$$

En particulier la dérivée conique de la projection de  $v_0$  **n'existe pas** dans la direction critique

$$h(x) = \frac{x^2}{2} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x) - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{6}.$$

Ici l'inclusion dans le cône critique  $\overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0) \cap (\text{Vect}(v_0 - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}((v_0))))}^{\perp \mathbb{H}} \subset \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)$  est stricte, car le cône de support à  $\mathbb{K}$  en  $u_0$  est  $\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0) := \bigcup_{t>0} t(\mathbb{K} - u_0)$ , et

$$\overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0) \cap (\text{Vect}(v_0 - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}((v_0))))}^{\perp \mathbb{H}} = \{v \in \mathbb{H} / v(0) = 0, v'(0) = 0\}$$

avec le cône critique

$$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0) = \{v \in \mathbb{H} / v(0) = 0\}.$$

Mécaniquement, la fonction  $u_0$  peut être vue comme la solution du problème de la flexion unilatérale d'une poutre linéairement élastique simplement appuyée sur  $\partial\Omega$  au dessus d'un obstacle  $\psi = 0$ . C'est donc la projection sur le convexe des déplacements cinématiquement admissibles  $\mathbb{K}$  de la solution bilatérale associée  $v_0$  sous un chargement  $f_0$ . Observons que la fonction  $v_0 \in \mathbb{H}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ , en dérivant 4 fois  $v_0$  nous trouvons la force  $f_0 \notin L^2(\Omega)$ , puisque  $v_0^{(4)}(0) = -\delta_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ , ce qui conserve un sens mécanique. Mais en dérivant 4 fois  $h \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  nous trouvons  $h^{(4)} = \delta'_0$  qui est une distribution d'ordre 1 ! En particulier  $h^{(4)} \notin \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  ce qui ne permet pas de conclure à la non-différentiabilité de la solution du problème de la flexion unilatérale d'une poutre.

#### 4.2.2 « Un delta qui bouge ! »

Considérons une poutre élastique en appui simple, solution du problème d'obstacle (4.2). Nous optons pour un obstacle de la forme  $\psi(x) := -(2/3 - x)^2$ , et nous choisissons un champ de forces dépendant d'un paramètre  $t$  de la forme

$$t \mapsto f(t) := -t\delta_{x=1/3}.$$

A l'instant initial  $t = 0$ , cette poutre occupe le segment  $\overline{\Omega} := [0, 1]$  et est en contact affleurant avec un obstacle en un unique point  $c(0) = 2/3$ . Notre objectif est de montrer que, pour  $t > 0$  suffisamment petit, la zone de contact se réduit à un point, noté  $c(t) = c$  et que la réaction est

$$\mu(f) = p\delta_{x=c}$$

où la fonction  $p$  est telle que  $p(0) = 0$ ,  $p(t) > 0$  pour  $t > 0$ , et  $c$  non constants. Pour ce faire, nous exhibons la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(4)} = f + \mu(f) \text{ sur } \Omega, \\ u \geq \psi, \mu(f) \geq 0, (u - \psi)\mu(f) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 = u''|_{\partial\Omega}. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

► En supposant que le contact ait lieu en un point unique  $c$  l'intensité de la réaction prend la forme suivante :

$$p(t) := \frac{(18tc^3 + 72 - 162c^2 + t - 27tc^2)}{54c^3(c - 1)}.$$

► Pour  $t$  suffisamment petit le contact a lieu en un unique point  $c$  si et seulement si  $t$  et  $c$  sont solutions de l'équation implicite suivante (obtenue en injectant la réaction  $p$  dans le problème (4.12) et en exploitant la régularité  $C^2(\Omega)$  de la solution  $u_t$ ) :

$$216c - t + 54c^6p - 54pc^3 + 81tc^4 + 3tc - 27c^5t + 162pc^4 - 162pc^5 - 72 - 270c^3 - 54c^2 + 162c^4 - 80tc^3 + 24tc^2 = 0.$$

Grâce au théorème des fonctions implicites il est facile de voir qu'il existe une unique solution  $c$  pour  $t \in [0, 100]$ . On tire

$$t = \frac{18(-8c + 4 + 3c^2)}{(3c - 1)(3c + 1)(c - 1)^2},$$

ce qui fournit le graphe (4.1) donnant l'évolution du point  $c$  en fonction de  $t$ .

On obtient alors le graphe (4.1) de l'intensité de la réaction  $p$ , qui montre qu'elle est strictement positive quand  $t > 0$ .

► Enfin le déplacement  $u$  ( $\in \mathbb{H}^3(\Omega)$ ) s'obtient sous la forme :

$$u(x, \cdot) = \begin{cases} u_0(x, \cdot) & \text{pour } x \in [0, 1/3] \\ u_1(x, \cdot) & \text{pour } x \in [1/3, c] \\ u_2(x, \cdot) & \text{pour } x \in [c, 1] \end{cases} \quad (4.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= -\frac{(27c^5 - 117c^4 + 27x^2c^3 + 192c^3 - 99x^2c^2 - 156c^2 + 150x^2c + 48c - 64x^2)x}{18c(c-1)^2(3c+1)}, \\ u_1(x, t) &= -\frac{117x^3c^2 - 126x^3c + 64x^3 - 162x^3c^3 + 81x^3c^4 + 432x^2c^2 - 216x^2c - 162x^2c^3}{18c(c-1)^2(9c^2-1)} \\ &\quad + \frac{378c^5x + 24cx + 156c^2x + 693c^4x + 81c^6x - 606c^3x + 16c^2 - 8c - 6c^3}{18c(c-1)^2(9c^2-1)}, \\ u_2(x, t) &= -\frac{-9c^4 + 9c^4x + 24c^3 - 24c^3x + 9x^3c^2 - 30c^2 + 48c^2x}{18(c-1)^3} \\ &\quad + \frac{27x^2c^2 + 54x^2c + 24c - 18x^3c - 60cx - 8 + 24x + 8x^3 - 24x^2}{18(c-1)^3}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Commentaires 4.2.1** On peut se convaincre que  $t \mapsto \mu(t) \in \mathbb{W}^{1,1}(0, T; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ , et cet exemple prouve qu'en général  $t \mapsto \mu(t) \notin \mathbb{W}^{1,1}(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ .

Notons que  $\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\|_{\mathbb{H}^{-1}} = \sqrt{t_1 - t_2}$ .

Puisque la réaction est proportionnelle à une masse de Dirac ceci montre en particulier que l'application  $f(\cdot, t) \mapsto u(\cdot, t)$  n'est pas lipschitzienne de  $\mathbb{H}^{-1}$  à valeur dans  $\mathbb{H}^3$  ! Elle est au mieux  $\frac{1}{2}$ -Hölderienne.

En fait pour tout  $t \geq 0$ , la solution  $u_t$  admet un unique point de contact  $c$  donné par les équations ci-dessus, et  $c$  tend asymptotiquement vers  $1/3$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### 4.2.3 Poutre en flexion : instabilité pour un point de contact isolé

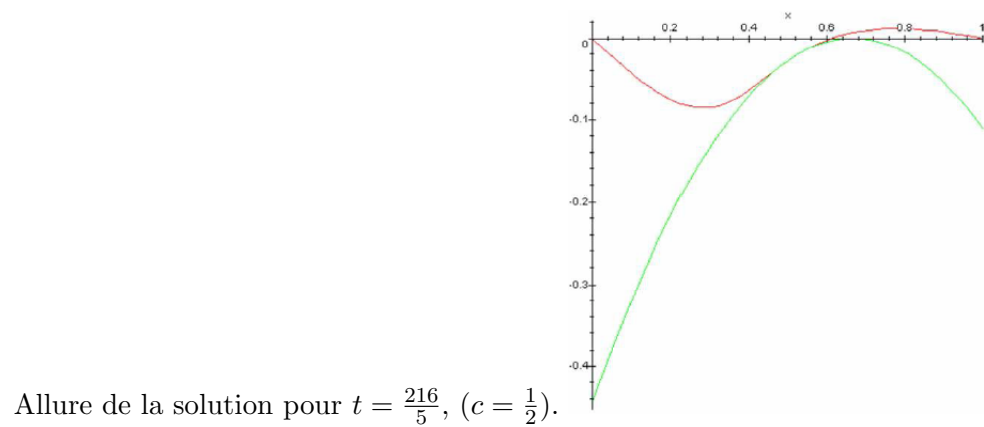
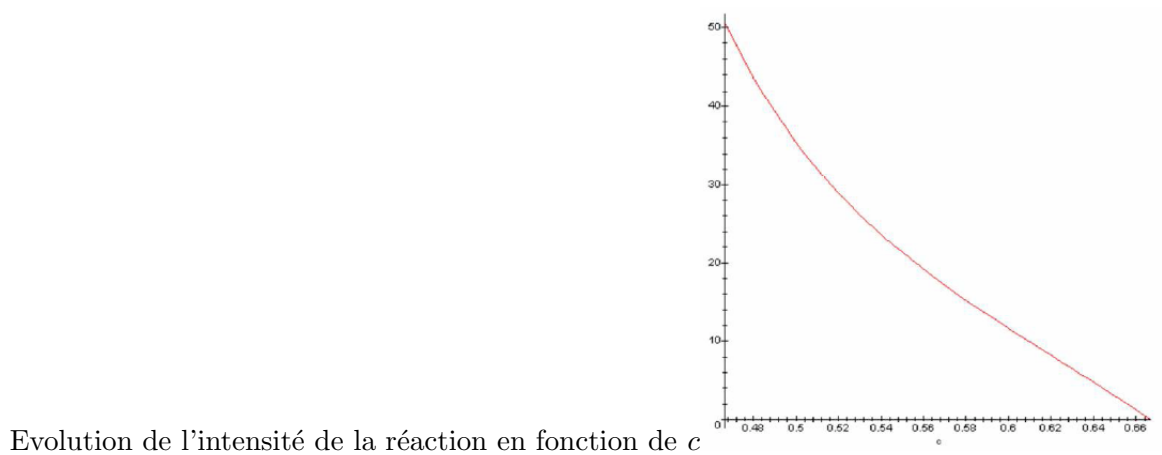
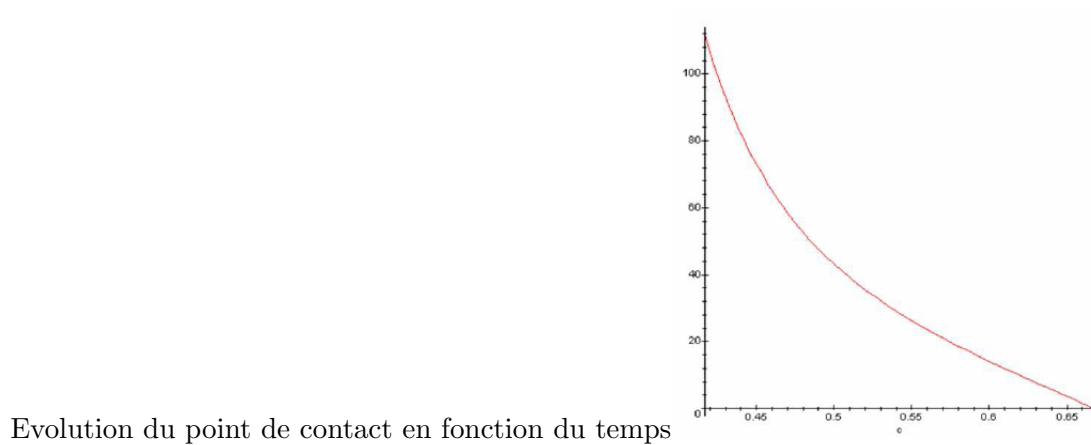


FIG. 4.1 – Graphes de la solution de la poutre en flexion soumise à une force ponctuelle variable



Nous pouvons montrer sur un exemple que l'évolution de la zone de contact à partir d'un point isolé où la réaction est non nulle et les courbures entre la poutre et l'obstacle sont égales peut se faire suivant un segment ou se séparer en deux points.

**Exemple 4.2.1** *Poutre en flexion : « étalement de la zone de contact »*) Reprenons l'exemple de la poutre encastrée occupant au repos  $\bar{\Omega} = [-1, 1]$ , soumise au chargement uniforme  $f : t \mapsto -t$ , et placée au dessus d'un obstacle rigide  $\psi = -1$ , i.e. vérifiant le problème (4.6). Pour  $0 \leq t < 24$  la poutre ne touche pas l'obstacle, la solution s'écrit :

$$u_0(x, t) := -\frac{t}{24}x^4 + \frac{t}{12}x^2 - \frac{t}{24}$$

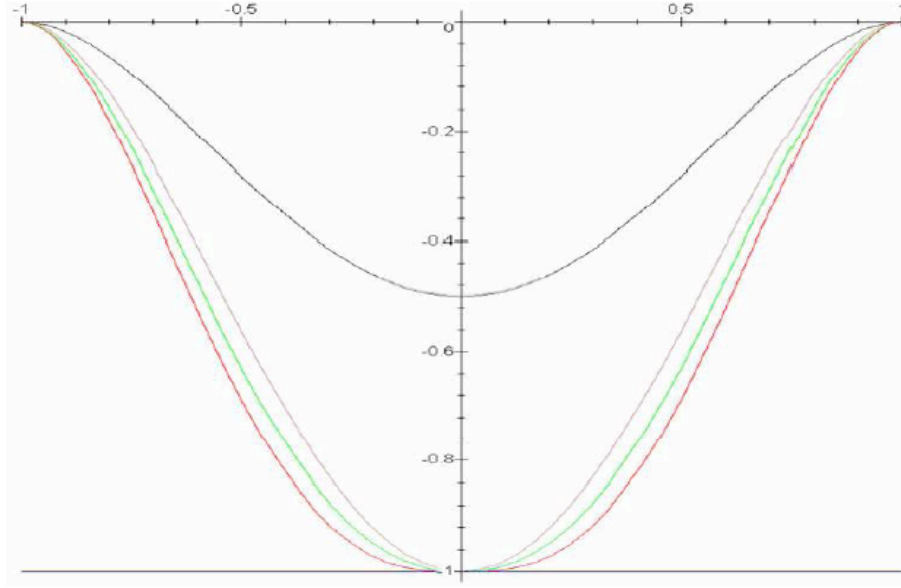


FIG. 4.2 – flexion d'une poutre encastrée (par ordre décroissant) : sans contact, contact affleurant, contact tangent avec réaction ponctuelle, contact avec étalement imminent et réaction ponctuelle

Pour  $24 \leq t \leq 72$  la poutre touche l'obstacle en un point avec une réaction ponctuelle, le contact est seulement tangent sauf pour  $t = 72$  où il y a aussi raccord des courbures entre l'obstacle et la poutre (voir figure 4.2). La solution s'écrit :

$$u_1(x, t) := -\frac{t}{24}x^4 + 4\left(\frac{t}{24} - 1\right)|x|^3 + \left(-\frac{t}{12} + 6\right)\frac{x^2}{2} - 1$$

Pour  $t > 72$  la poutre touche l'obstacle suivant un intervalle  $[-y, y]$ , avec  $y = 1 - \sqrt[4]{\frac{72}{t}}$  (voir figure 4.3). La solution s'écrit sur  $[y, 1]$  :

$$\begin{aligned} u_2(x, t) := & -\frac{t}{24}x^4 + \left(\frac{t}{3(1+y^2-2y)} - \frac{ty^3}{3(1+y^2-2y)} + \frac{ty^2}{(-1+y)}\right)\frac{x^3}{6} \\ & + \left(-\frac{yt}{3(1+y^2-2y)} + \frac{y^4t}{3(1+y^2-2y)} - (y+1)\frac{ty^2}{4(-1+y)}\right)\frac{x^2}{2} \\ & + \left(\frac{y^2t}{6(1+y^2-2y)} - \frac{(-1+2y)ty^3}{6(1+y^2-2y)} + \frac{y^3t}{2(-1+y)}\right)x \\ & + \left(\frac{t}{24} - \frac{(1+3y^2-3y)t}{18(1+y^2-2y)} + \frac{(-2+3y)ty^3}{18(1+y^2-2y)} - \frac{(3y-1)ty^2}{12(-1+y)}\right). \end{aligned}$$

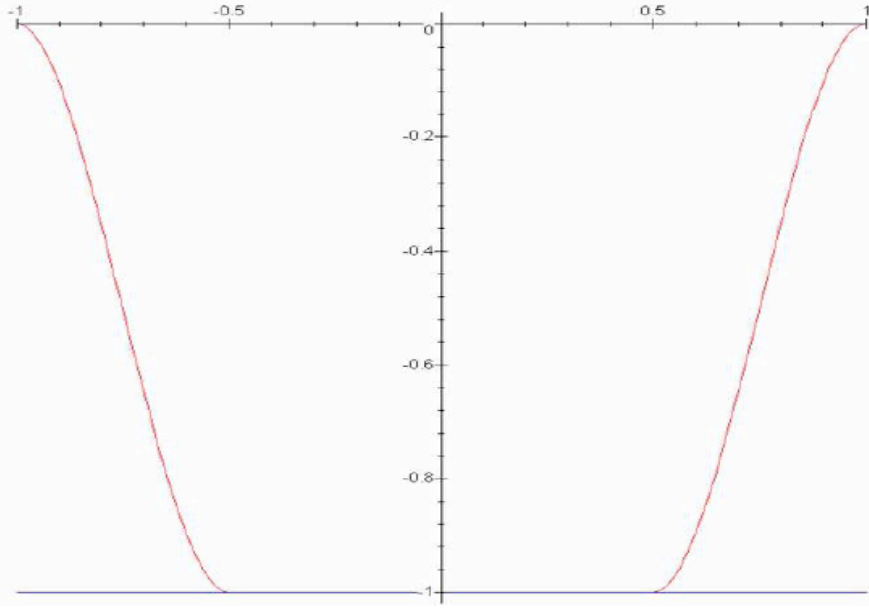


FIG. 4.3 – flexion d’une poutre encastrée : contact suivant un intervalle

Il découle des calculs précédents que la flexion de la poutre encastrée sous le chargement uniforme  $t \mapsto f(t)$  est décrite par la fonction :

$$(x, t) \mapsto u(x, t) = \begin{cases} u_0(x, t) & \text{pour } 0 \leq t \leq 24, \\ u_1(x, t) & \text{pour } 24 \leq t \leq 72, \\ u_2(x, t) & \text{pour } 72 < t. \end{cases}$$

On se convainc facilement que cette fonction n’est pas dérivable par rapport à  $t$  en  $t = 24$  et  $t = 72$ , ce qui correspond au changement de nature topologique de la zone de contact.

**Exemple 4.2.2** *Poutre en flexion : « division de la zone de contact en 2 points »*

Considérons une poutre occupant au repos le segment  $[-1, 1]$ , en appui simple à ses bords, placée au dessus d’un obstacle  $\psi(x) = -1 - x^4$ , soumise à une force

$$f(x, t) = -t\delta_{x=1/2} - t\delta_{x=-1/2}, \quad t \geq 0.$$

Son équilibre est régi par (4.2), dont nous calculons la solution  $u_t$  pour les différentes valeurs de  $t$ .

- Pour  $0 \leq t < 24/11$  il n’y a pas contact et la solution s’exprime sous la forme suivante :

$$u_t(x) = -\frac{t}{6}(|x - 1/2|^3 + |x + 1/2|^3) + tx^2 - \frac{20}{48}t;$$

- Pour  $24/11 \leq t < 24/9$  la zone de contact est un point isolé avec réaction ponctuelle dès que  $t > 24/11$  (figure 4.4).
- Pour  $t > 24/9$  la zone de contact se scinde (continuellement) en deux points distincts (figure 4.4). La distance  $r$  des points de contact à l’origine est reliée à  $t$  par :

$$t = \frac{8(5r^4 - 4r^3 - 4r^2 - 3)}{((2r - 1)(12r^2 - 20r + 9))} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{24}{9}.$$

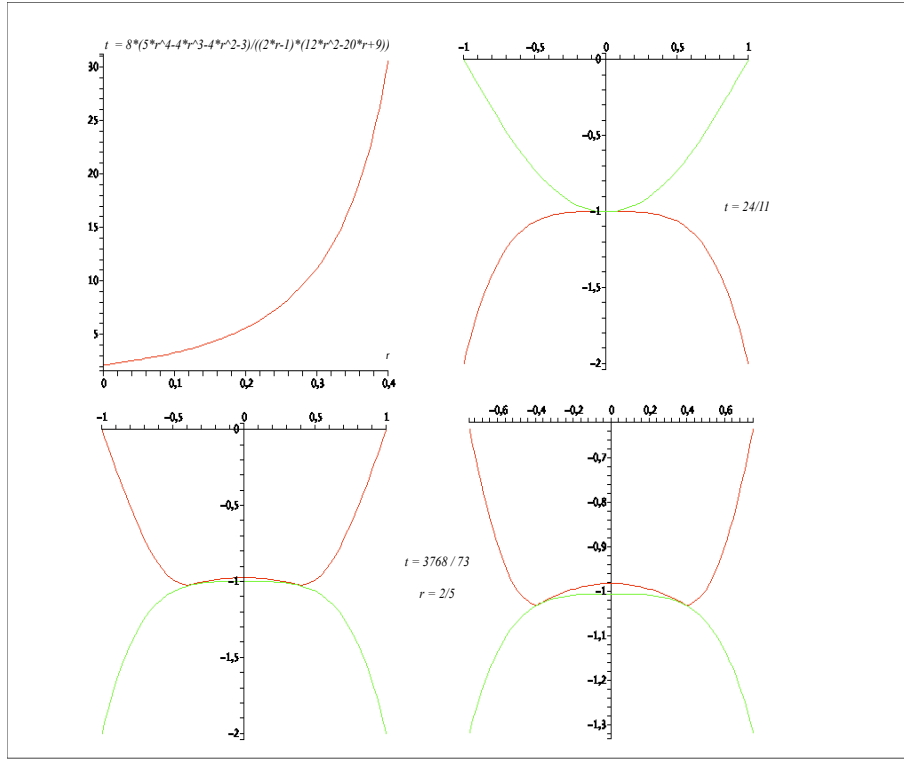


FIG. 4.4 – Flexion d'une poutre soumise à  $f(x, t) = -t\delta_{x=1/2} - t\delta_{x=-1/2}$

#### 4.2.4 Stabilité et instabilité de la zone de contact pour une plaque circulaire

Pour illustrer comment peut évoluer la zone de contact, nous envisageons de traiter trois problèmes mettant en jeu une plaque circulaire encastree dans des situations où nous pouvons expliciter analytiquement les solutions de cas axisymétriques (i.e indépendantes de  $\theta$ ,  $\partial_\theta = 0$ ).

**Exemple 4.2.3** (*instabilité par rapport à l'obstacle*) Dans l'article de L. CAFFARELLI & A. FRIEDMAN[30], est donnée une illustration de l'instabilité de la zone de contact en fonction de la forme de l'obstacle. Il est montré que pour  $\Omega := \mathbb{B}^2(0, 3)$ , le disque du plan de centre 0 et de rayon 3, pour  $t \geq 0$  et pour obstacle :

$$\hat{\psi}_t(r) := 1 - \frac{r^2}{4} - tr^4,$$

le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 \hat{U}_t = \hat{\mu}_t & \text{dans } \Omega \\ 0 \leq \hat{U}_t - \hat{\psi}_t \perp \hat{\mu}_t \geq 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \hat{U}_t = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_\nu \hat{U}_t = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.15)$$

a pour ensemble de coïncidence :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \mathbb{B}^2(0, \rho) & \text{si } t = 0 \text{ (voir figure 4.5),} \\ \mathcal{I}_t &= \partial\mathbb{B}^2(0, \rho_t) & \text{si } t > 0 \text{ (voir figure 4.6).} \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Proposition 4.2.1** *La fonction  $t \mapsto \rho_t$  est croissante quand  $t \downarrow 0$ .*

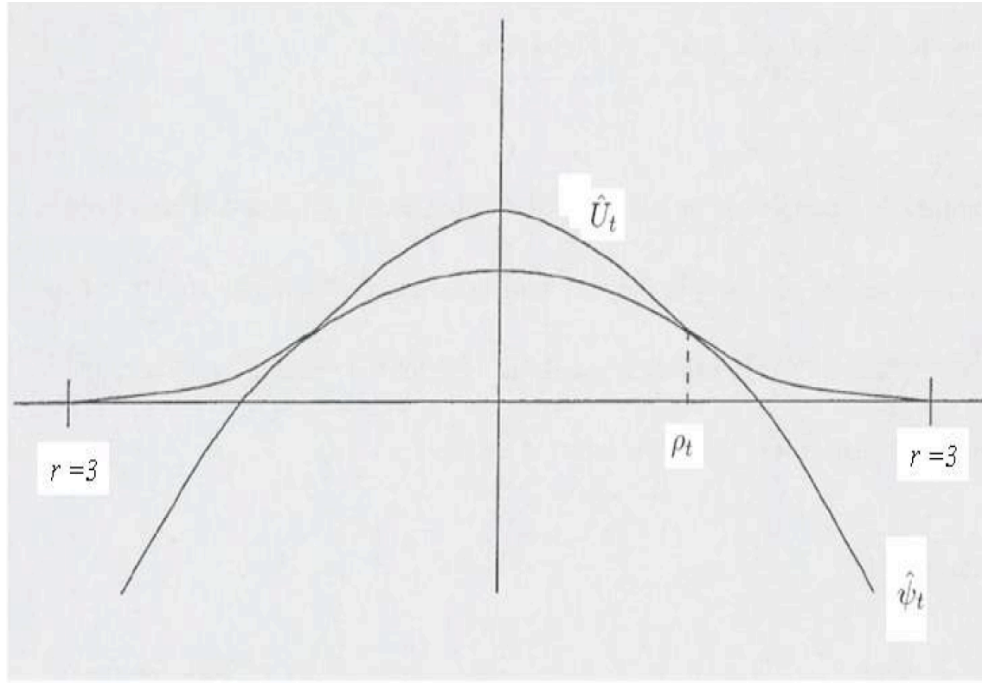


FIG. 4.5 – plaque circulaire encastrée soulevée par un obstacle parabolique  $\hat{\psi}_t$  : la zone de contact  $\mathcal{I}_t$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $\rho_t$ .

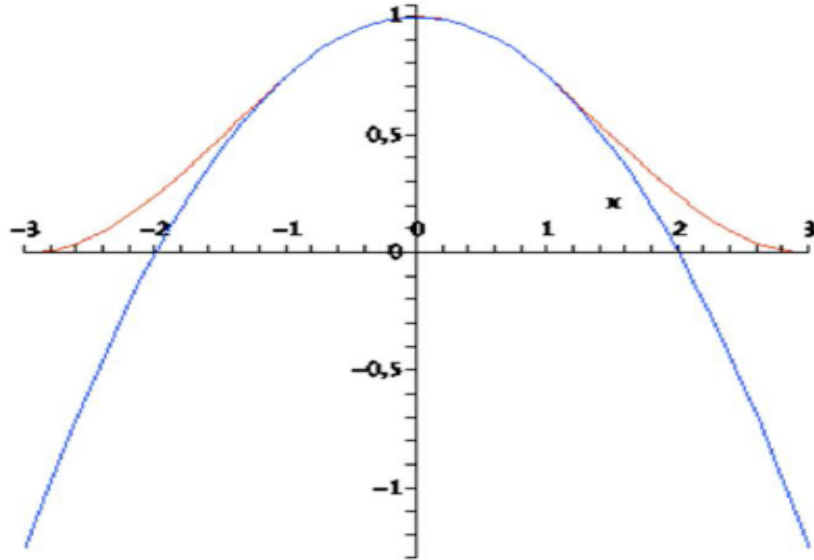


FIG. 4.6 – plaque circulaire encastrée soulevée par un obstacle parabolique  $\psi_0 : r \mapsto 1 - \frac{r^2}{4}$  : la zone de contact  $\mathcal{I}_0 = \mathbb{B}^2(0, \frac{21}{25})$  est le disque de centre 0 et de rayon  $\frac{21}{25}$ .

**Preuve :** ♦ Remarquons que la décroissance de  $t$  vers 0 implique la croissance de  $\hat{\psi}_t$ . Posons  $E_t := \inf_{v \in \mathbb{K}_{\hat{\psi}_t}} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 d\Omega$ . Puisque  $\mathbb{K}_{\hat{\psi}_{t_1}} \supset \mathbb{K}_{\hat{\psi}_{t_2}}$  pour  $t_1 \geq t_2$ , alors  $E_{t_1} \leq E_{t_2}$ . Ainsi  $t \mapsto E_t$  est croissante quand  $t \downarrow 0$  et atteint un minimum en  $t = 0$ , d'où  $\frac{d}{dt} E_t|_{t=0} \leq 0$ .

D'autre part on peut calculer que :

$$\Delta U(r, t) = \begin{cases} -1 - 16t\rho_t^2 & \text{pour } 0 \leq r \leq \rho_t, \\ -\frac{1 + 16t\rho_t^2}{\ln(r/3)} & \text{pour } \rho_t \leq r \leq 3. \end{cases}$$

On conclut que  $\frac{d}{dt}\rho_t|_{t=0} < 0$ , et donc que  $\rho_t$  croît quand  $t \downarrow 0$ . ♦

#### Commentaires 4.2.2 (*Interprétations Mécaniques*)

En faisant le changement de variable  $U := \hat{U} + tr^4$ , et en introduisant le champ de forces  $F_t := -\Delta^2(tr^4) = -64t$ , (4.15) devient :

$$\begin{cases} \Delta^2 U = F_t + \mu_t & \text{sur } \Omega \\ 0 \leq U_t - \psi \perp \mu_t \geq 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \\ U = 3^4 t & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.17)$$

Ceci se traduit, pour  $\Omega$  un disque de centre 0 et de rayon 3 avec  $t > 0$ , par le fait qu'une plaque circulaire encastrée sur son bord auquel est imposé un déplacement de  $81t$ , touche l'obstacle  $r \mapsto \psi_0(r) := (1 - \frac{r^2}{4}) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  selon un cercle de rayon  $0 < \rho_t < 3$  lorsqu'elle est soumise à un champ de forces constant de la forme

$$F_t(r) = -\Delta^2(\psi_\varepsilon - \psi_0(r)) = -\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)^2(\varepsilon r^4) = -\left(\partial_r^4 + \frac{2}{r}\partial_r^3 - \frac{1}{r^2}\partial_r^2 + \frac{1}{r^3}\partial_r\right)(\varepsilon r^4) = -64t.$$

#### Exemple 4.2.4 *Plaque circulaire encastrée sous chargement constant*

Intéressons nous à l'évolution de la zone de contact entre un obstacle plan  $\psi := -1$ , et une plaque circulaire,  $\Omega := \mathbb{B}^2(0, 1)$ , soumise à une force  $F_t$  uniforme  $-t\vec{e}_3$  sur  $\Omega$ , avec  $t$  variant dans  $\mathbb{R}^+$ .

L'équation d'équilibre, en coordonnées polaires, est donc

$$\Delta^2 U_t = -t \quad \implies \quad U_t(r) = -\frac{t}{64}r^4 + ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r + d,$$

les constantes  $a, b, c, d$  étant à déterminer en fonction des conditions aux limites.

En  $r = 0$ , le déplacement doit être fini, donc  $a = c = 0$ . Puis des conditions aux limites d'encastrement ( $U_t(1) = 0$ , déplacement nul au bord,  $\partial_\nu U_t = 0$ , rotation nulle au bord) donnent  $b = \frac{t}{32}$  et  $d = \frac{t}{64}$ , d'où pour  $0 \leq t \leq 64$  :

$$U_t(r) = -\frac{t}{64}(1 - r^2)^2.$$

Ainsi la plaque est en contact affleurant avec l'obstacle, pour une pression  $t = 64$ , en  $(0, 0)$  (voir figure 4.7).

En augmentant la pression exercée sur la plaque la zone de contact s'étale (de mesure non nulle d'après 3.2.3), comme nous savons que la zone de contact est axi-symétrique, il s'agit donc d'un disque (voir figure 4.7). Alors trouver la solution unilatérale et le rayon  $y$  du disque

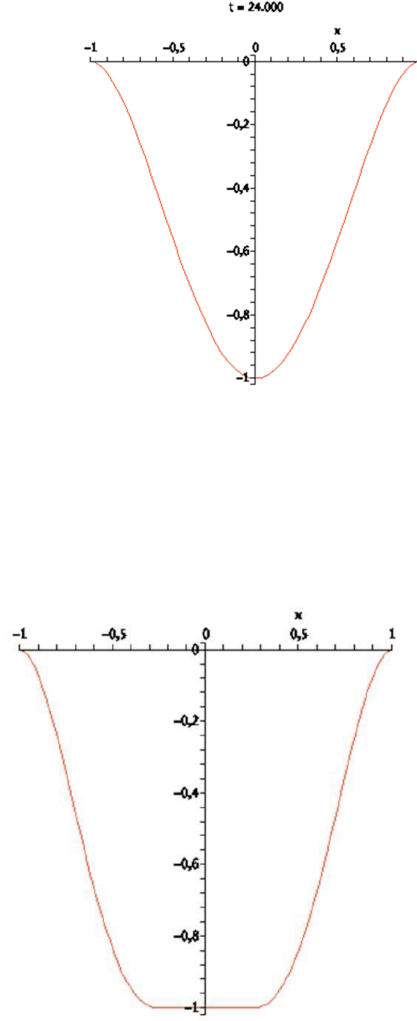


FIG. 4.7 – plaque circulaire encastrée sous un chargement uniforme au dessus d'un obstacle  $\psi : r \mapsto -1$  : la zone de contact  $\mathcal{I}(F_{24}) = \{(0,0)\}$  est un point alors que la réaction est nulle ; puis en augmentant le chargement la zone de contact devient un disque et la réaction est non-nulle.

de contact  $\mathcal{I}(F_t) := \mathbb{B}^2(0, y)$  revient à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U_t(r) & = & -t \quad \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F_t) \\ U_t(r) & \geq & -1 \quad \text{sur } \Omega \\ \partial_r U_t(r) & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ U_t(r) & = & -1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F_t) \\ \partial_r U_t(r) & = & 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F_t) \\ \partial_r^2 U_t(r) & = & 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{I}(F_t) \end{array} \right.$$

Le déplacement est donc de la forme  $U_t(r) = -\frac{t}{64}r^4 + ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r + d$  et satisfait

les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U_t(1) & = & 0 \\ U_t(r_t) & = & -1 \\ \partial_r u(1) & = & 0 \\ \partial_r U_t(y) & = & 0 \\ \partial_r^2 U_t(y) & = & 0 \end{array} \right.$$

Il s'agit de trouver  $a, b, c, d, y$ , sachant que  $y$  est le rayon de la zone de contact. On trouve que  $t$  et  $y$  sont reliés par la relation suivante :

$$t = -64 \frac{(-1 - 2 \ln(y) + y^2)}{(-3 + 7y^2 - 5y^4 + y^6 - 4y^2 \ln(y) + 6y^4 \ln(y) - 2 \ln(y) - 8y^4 \ln(y)^2)}$$

Avec l'aide de Maple, nous avons trouvé que pour  $t > 64$  :

$$\begin{aligned} U(r, t) := & \frac{(-64 - 2ty^2 \ln(y) + 4 \ln(r)y^6 t + tr^4 + 128y^2 \ln(y) - 2ty^4 + 64y^2 - 8 \ln(r)y^4 t}{64(1 - 2y^2 - 4y^2 \ln(y)^2 + y^4)} \\ & + \frac{64r^2 + 4 \ln(r)y^2 t - 4y^2 \ln(y)^2 t - 4tr^4 y^2 \ln(y)^2 + 2r^2 \ln(r)ty^2 + 2r^2 \ln(r)ty^4 - 2r^2 \ln(r)ty^6 + 2r^2 ty^2 \ln(y)}{64(1 - 2y^2 - 4y^2 \ln(y)^2 + y^4)} \\ & + \frac{8r^2 y^2 \ln(y)^2 t - 4r^2 ty^4 \ln(y) + 2r^2 ty^6 \ln(y) + 4 \ln(r)y^2 t \ln(y) - 4 \ln(r)y^6 t \ln(y) + ty^2 + ty^6}{64(1 - 2y^2 - 4y^2 \ln(y)^2 + y^4)} \\ & - \frac{2tr^4 y^2 + tr^4 y^4 + r^2 ty^2 + r^2 ty^4 - r^2 ty^6 - r^2 t - 64r^2 y^2 - 128r^2 \ln(r) + 4ty^4 \ln(y) - 2ty^6 \ln(y)}{64(1 - 2y^2 - 4y^2 \ln(y)^2 + y^4)} \\ & + \frac{128r^2 \ln(r)y^2 - 2r^2 \ln(r)t - 128r^2 y^2 \ln(y) - 8r^2 \ln(r)ty^2 \ln(y) + 8r^2 \ln(r)ty^4 \ln(y) + 256 \ln(r)y^2 \ln(y)}{64(1 - 2y^2 - 4y^2 \ln(y)^2 + y^4)} \end{aligned}$$

► Au point de transition équation-inéquation,  $t = 64$ , la fonction  $t \mapsto U(., t)$  n'est pas  $F$ -dérivable !

### 4.3 Polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Puisqu'il existe une dérivée faible (*conique*) pour les solutions d'inéquations variationnelles posées dans  $\mathbb{H}^1$  permettant de construire des méthodes de suivi de courbe il semble naturel de se questionner sur son extention au cas de  $\mathbb{H}^2$ . La notion clé dans  $\mathbb{H}^1$  est la *polyédricité* du convexe des déplacements cinématiquement admissibles,  $\mathbb{K}_\psi$ . Nous allons rappeler les résultats de M. RAO, I. SOKOLOWSKI [106] qui établissent en particulier que  $\mathbb{K}$  n'est polyédrique que si le support de la réaction est admissible au sens précisé ci-dessous (dans un contexte un peu plus général que dans [106]). Cette caractérisation est à rapprocher du théorème B.0.4 de A. HARAUX, qui montre qu'en général les convexes de  $\mathbb{H}^2$  ne sont pas polyédriques. Nous obtenons alors un autre éclairage sur les résultats de A. CIMETIÈRE & A. LÉGER [39].

**Définition 4.3.1** [106] Nous notons la  $\text{Cap}_2$ -capacité de  $N \subset \Omega$  par

$$\text{Cap}_2(N) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\Delta \phi|^2 d\Omega, / 0 \leq \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \phi \geq 1 \text{ sur } N \right\}.$$

Soit  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier. Un compact  $K \subset \Omega$  est dit  $\mathbb{H}^2$ -admissible si  $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) : (h \equiv 0 \text{ Cap}_2\text{-q.p. sur } K \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K))$ , i.e.  $h = 0, \partial_n h = 0$  sur  $\partial K$  (au sens des distributions), avec  $n$  normale extérieure à  $\partial K$ ). La notation  $\text{Cap}_2\text{-q.p. sur } K$ , signifie que la propriété  $h = 0$  est satisfaite sur  $K$ , exceptée sur un sous-ensemble  $N \subset K$ , tel que  $\text{Cap}_2(N) = 0$ .

**Proposition 4.3.1** [106] Avec les notations et hypothèses de la Définition 4.3.1, un compact  $K_\psi \subset \Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  est  $\mathbb{H}^2$ -admissible si pour  $\text{Cap}_1$ -quasi tout  $x \in K_\psi$  et pour toute boule  $\mathbb{B}^N(x, r)$  de rayon  $r > 0$  suffisamment petit :

$$\Lambda_N(K_\psi \cap \mathbb{B}^N(x, r)) > 0,$$

$\Lambda_N$  étant la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^N$ .

**Remarque 4.3.1** Dans  $\mathbb{R}^N$ , un vrai segment avec  $N = 1$ , ou une surface régulière avec  $N = 2$  sont des compacts  $\mathbb{H}^2$ -admissible. Du coup les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas  $\mathbb{H}^2$ -admissibles.

Calculons les cônes tangent et critique pour un convexe de  $\mathbb{H}^2$ . Ces ensembles sont définis dans l'Annexe B à partir du cône de support à  $\mathbb{K}$  en  $u$ , noté  $\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \bigcup_{\tau > 0} \tau(\mathbb{K} - u)$ .

**Proposition 4.3.2** Soit  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier, avec  $N \leq 3$ . Pour tout élément  $u_0 \in \mathbb{K} := \mathbb{K}_\psi = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq \psi\}$ , rappelons que nous notons la zone de contact  $\mathcal{I}_0 := \{x \in \Omega / u_0(x) = \psi(x)\}$ . Alors le cône tangent d'ordre 1 prend la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(u_0) = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0\}.$$

Le cône critique associé au projecteur métrique s'écrit :

$$\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0) = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \text{Supp}(\mu), v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0 \setminus \text{Supp}(\mu)\}.$$

**Preuve :** ♦ Nous savons que  $v \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(u_0) \iff \frac{1}{t} \text{dist}(u_0 + tv, \mathbb{K}) \longrightarrow 0$  quand  $t \downarrow 0$ . Puisque  $\mathbb{K}$  est un convexe, ceci est équivalent à dire :

$$\left\| \frac{u_0 + tv - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u_0 + tv)}{t} \right\|_{\mathbb{H}_0^2} \xrightarrow{t \downarrow 0} 0.$$

Sachant que  $u_0(x) \geq \psi(x)$  sur  $\overline{\Omega}$ , nous déduisons que  $\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(u_0) \subseteq \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0\}$ . Montrons la réciproque. Puisque les éléments de  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$  sont continus sur  $\overline{\Omega}$  (en dimension



$\leq 3$ ), alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists t > 0$  tels que :

$$u_0 + t(v + \varepsilon \eta) - \psi \geq 0, \text{ sur } \Omega,$$

avec  $0 \leq \eta \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\eta \equiv 1$  sur  $\mathcal{I}_0$ , i.e.  $\eta$  est une fonction plateau sur la zone de contact.

Ainsi  $(v + \varepsilon \eta) \in \mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0) = \bigcup_{t>0} t(\mathbb{K} - u_0)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , d'où  $(v + \varepsilon \eta) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^2}} v$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Du coup  $v \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u_0) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0)}$ .

Le calcul du cône critique est immédiat, à partir de la définition

$$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(\mu),$$

$\ker(\mu) := (u)^\perp := \{h \in \mathbf{X} / \langle u, h \rangle = 0\}$ . ♦

Enonçons à présent le lien entre polyédricité et admissibilité obtenu par M. RAO & J. SOKOLOWSKI dans [106].

**Théorème 4.3.1** [106] Soient  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  avec  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$  puis  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ ,  $\mathbb{K} := \mathbb{K}_\psi$ . Soit  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^\flat)$  la projection métrique (pour le produit scalaire  $\langle v, w \rangle_{\mathbb{H}} := \int_{\Omega} \Delta v \Delta w d\Omega$ ) d'un élément  $u^\flat \in \mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ , i.e. vérifiant

$$\|u^\flat - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^\flat)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|u^\flat - v\|_{\mathbb{H}}. \quad (4.18)$$

Et soit  $\nu$  la mesure de Radon positive définie par

$$\int_{\Omega} \varphi d\nu = \int_{\Omega} \Delta(\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^\flat) - u^\flat) \Delta \varphi d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Alors le convexe  $\mathbb{K}_\psi$  est polyédrique en  $u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^\flat)$  si le support de la mesure  $\nu$  associée à  $u$  est  $\mathbb{H}_0^2$ -admissible.

**Remarque 4.3.2** Ce théorème indique donc que la différentiabilité conique de l'opérateur de projection sur le convexe  $\mathbb{K}_\psi$  n'est plus assurée par le théorème B.0.3 de A. Haraux dès lors que le support de la mesure de réaction n'est pas admissible ! Nous en déduisons ce que nous avons annoncé : la polyédricité n'est pas toujours garantie pour (3.2).

**Théorème 4.3.2** Soit  $U$  la solution du problème (3.2), avec  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  avec  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$  puis  $\partial\Omega \in C^2$ . Le convexe  $\mathbb{K}_\psi$  est polyédrique en  $U$  si et seulement si le support de la mesure  $\mu(F)$  associée à  $U$  est  $\mathbb{H}_0^2$ -admissible.

## 4.4 Espaces tangents d'ordre 2 et $\sigma$ -terme

### 4.4.1 Définitions et caractérisations des ensembles tangents à l'ordre 2

Comme dans les problèmes d'optimisation sans contraintes, les conditions du second ordre servent à vérifier l'optimalité locale d'un point critique, elles sont également utiles dans l'analyse de la convergence et l'estimation d'erreur des algorithmes. Quand les conditions nécessaire et suffisante du second ordre sont les plus proches possibles (ne différant que d'une égalité large ou stricte) elles sont dites « no-gap ». Pour les problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état, les conditions « no-gap » sont difficiles à obtenir à cause de la présence d'un terme supplémentaire (dit  $\sigma$ -terme) dans la condition nécessaire (c.f. Théorème 4.4.4). Il a été mis en évidence par H. KAWASAKI [79] que le  $\sigma$ -terme est dû à la présence d'une infinité de contraintes d'inégalités. Ce terme est nul dans le cas où le convexe des états admissibles a une structure suffisamment simple par exemple quand il est polyédrique. Mais en général le  $\sigma$ -terme est non-nul, et les seules conditions suffisantes sans ce terme étaient connues jusqu'aux travaux [21] et [22] de F. BONNANS & A. HERMANT. La polyédricité des convexes de  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  est une condition d'ordre 1, au sens où elle est définie à partir du cône tangent à l'ordre 1. Puisque qu'elle n'est pas satisfaite en général, nous allons brièvement présenter les concepts de l'analyse à l'ordre 2 nécessaires pour décrire l'éventuelle courbure du convexe  $\mathbb{K}$ . Ils ont été introduits et développés, dans le cadre des espaces de Banach, par F. Bonnans, R. Cominetti, H. Kawasaki, A. Shapiro depuis la fin des années 80. A l'aide des ensembles tangents d'ordre 2, il est alors possible de définir une notion de polyédricité affaiblie qui donne lieu à des théorèmes de dérivabilité directionnelle. Nous rappelons que nous considérons des inéquations variationnelles de la forme suivante :

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{K} / \langle \mathbf{H}(u), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.19)$$

avec  $\mathbf{H} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}^*$  une fonction continuellement différentiable, et  $\mathbb{K}$  un convexe fermé d'un espace de Banach  $\mathbf{X}$ .

**Définition 4.4.1** [20] Soit  $h \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)$ , nous définissons les ensembles limites<sup>2</sup>

$$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) := \limsup_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / (\frac{1}{2}t^2) = \{w \in \mathbf{X} / \exists t_n \downarrow 0 : \text{dist}(u + t_n h + \frac{1}{2}t_n^2 w, \mathbb{K}) = o(t_n^2)\}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / (\frac{1}{2}t^2) = \{w \in \mathbf{X} / \text{dist}(u + th + \frac{1}{2}t^2 w, \mathbb{K}) = o(t^2)\}$$

appelés, respectivement, les ensembles tangents extérieur et intérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .

Nous appelons ensemble de contact à l'ordre 2, l'ensemble  $\mathcal{I}^2(u_0, h) := \{x \in \mathcal{I}(u_0) / h(x) = 0\}$

**Commentaires 4.4.1** Evidemment  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) \subseteq \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h)$ , mais il faut prendre garde au fait que rien n'assure en général que les ensembles tangents à l'ordre deux soient non vides<sup>3</sup> ! Ils sont non vides seulement si  $h \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)$  et  $\forall t > 0$ ,

$$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(x, th) = t^2 \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(x, h). \quad (4.20)$$

<sup>2</sup>au sens de Painlevé-Kuratowski, définition rappelée à la remarque B.0.4 dans l'Annexe B.

<sup>3</sup>Nous disposons des inclusions suivantes établies dans [20] :

**Proposition 4.4.1** [20] Si  $\mathbb{K}$  est un convexe de  $\mathbb{H}$ , alors :

$$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) + \mathbf{T}_{\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h) \subseteq \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h),$$

$$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) + \mathbf{T}_{\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h) \subseteq \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h).$$

De plus si  $0 \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h)$ , alors  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) = \mathbf{T}_{\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h)$  ; si  $0 \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h)$ , alors  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) = \mathbf{T}_{\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h)$ .

Du caractère lipschitzien de la fonction distance il découle qu'ils sont fermés. Et puisque  $\mathbb{K}$  est convexe alors  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, h)$  l'est aussi ; ce qui n'est pas le cas en général pour  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u_0, h)$ . L'introduction de ces ensembles est motivée par l'idée d'approximation suivante :

**Définition 4.4.2** *On dit de  $\mathbb{K}$  qu'il est régulier à l'ordre 2 en un point  $u_0 \in \mathbb{K}$  si pour tout  $h \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}(u)$  et tout suite  $(u_k)_k$  de  $\mathbb{K}$  de la forme  $u_k := u_0 + t_k h + \frac{1}{2} t_k^2 w_k$ , où  $t_k \downarrow 0$  et  $t_k w_k \rightarrow 0$ , la condition suivante est vérifiée*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(w_k, \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h)) = 0.$$

**Définition 4.4.3** [20] *Considérons l'ensemble des directions critiques à « courbures nulles » et l'ensemble des directions radiales critiques, définis respectivement par :*

$$\mathsf{C}^0(u) := \{h \in \mathsf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) \mid 0 \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h)\},$$

$$\mathsf{C}^{00}(u) := \{h \in \mathsf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) \mid h \in \mathsf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)\}.$$

*Nous disons que l'inéquation variationnelle (4.19) satisfait la condition de polyédricité étendue (resp. radiale étendue) en un point  $u$ , si  $\mathsf{C}^0(u)$  (resp.  $\mathsf{C}^{00}(u)$ ) est dense dans  $\mathsf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)$ <sup>4</sup>.*

**Commentaires 4.4.2** Notons que  $\mathsf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \subset \mathsf{C}^{00}(u) \subset \mathsf{C}^0(u) \subset \mathsf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)$ , et que la condition de polyédricité radiale étendue implique la condition de polyédricité étendue. La condition de polyédricité radiale étendue est en particulier vérifiée si  $\mathsf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) = \{0\}$ , ou bien si  $\mathbb{K}$  est polyédrique (dans le cas des inéquations variationnelles). En guise d'exemples nous pouvons citer les caractérisations des ensembles tangents d'ordre 2 intérieur et extérieur pour le cône convexe des fonctions continues positives données dans [20] ; également pour le cône convexe des fonctions positives de  $L^p(\Omega)$  données dans [42] et [43] :

**Théorème 4.4.1** *Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Soit  $\mathbb{K}$  le cône convexe des fonctions positives de  $L^p(\Omega)$ . Pour tout élément  $u_0 \in \mathbb{K}$ , et pour tout  $h \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}(u_0) = \{v \in L^p(\Omega) \mid v(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \mathcal{I}(u_0)\}$  les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$(a) \quad \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, h) \neq \emptyset,$$

$$(b) \quad 0 \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, h),$$

$$(c) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\Omega} [u_0 + th]_-^p d\Omega = 0,$$

$$(d) \quad \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u_0, h) = \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, h) = \{v \in L^p(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}^2(u_0, h)\}.$$

La caractérisation des espaces tangents à l'ordre deux, donnée par H. KAWAZAKI [79] pour le cône des fonctions continues positives nous servira par la suite, nous en présentons une version quelque peu étendue. Pour ce faire nous avons besoin de rappeler la définition de l'épiconvergence et le lemme suivant, énoncé dans dans [20].

<sup>4</sup>C'est à dire si pour un ensemble dense de  $h \in \mathsf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)$  on a :  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) = \mathsf{T}_{\mathsf{T}_{\mathbb{K}}(u)}(h) \neq \emptyset$ .

**Définition 4.4.4** Pour une famille de fonctions  $(f_t)_t \in C^0(\overline{\Omega})$ , on appelle épi-limite inférieure de  $(f_t)_t$  quand  $t \rightarrow t_0$  la limite suivante

$$\text{e-lim inf } f_t(X) = \liminf_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ X' \rightarrow X}} f_t(X').$$

**Lemme 4.4.1** [20] Soient  $\overline{\Omega}$  un compact métrique et  $(f_k)_k \in C^0(\overline{\Omega})$  une suite de fonctions continues. Alors

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \left( \inf_{X \in \overline{\Omega}} f_k(X) \right) = \inf_{X \in \overline{\Omega}} \left( \text{e-lim inf}_{k \rightarrow +\infty} f_k(X) \right)$$

Le théorème suivant figure dans [20] pour le cas  $\psi = 0$ , nous l'écrivons dans le cas plus général où  $\psi$  continu, ce qui permet d'introduire les outils et notations utiles par la suite.

**Théorème 4.4.2** Soient  $X := C^0(\overline{\Omega})$ ,  $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$ ,  $\mathbb{K} := \{v \in C^0(\overline{\Omega}) / v \geq \psi \text{ sur } \overline{\Omega}\}$ ,  $u \in \mathbb{K}$  et  $h \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(u) := \{v \in C^0(\overline{\Omega}) / v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I} = \{u = \psi\}\}$  Alors :

(i) L'ensemble tangent intérieur d'ordre 2 s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \{w \in C^0(\Omega) / w(X) \geq \varsigma_{u,h}(X), \forall X \in \overline{\Omega}\} \quad (4.21)$$

où la fonction  $\varsigma_{u,h} : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est définie par

$$\varsigma_{u,h} := -\text{e-lim inf}_{t \downarrow 0} \left( \frac{u - \psi + th}{t^2/2} \right)$$

avec

$$\varsigma_{u,h}(X) := \begin{cases} 0, & \text{si } X \in \text{int}(\mathcal{I}), \quad \text{et } h(X) = 0, \\ \theta_{u,h}(X), & \text{si } X \in \partial\mathcal{I}, \quad \text{et } h(X) = 0, \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.22)$$

avec

$$\theta_{u,h}(X) := \limsup_{\substack{X' \rightarrow X \\ (u-\psi)(X') > 0}} \frac{([-h(X')]_+)^2}{2(u(X') - \psi(X'))}.$$

(ii)  $\mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) \neq \emptyset \iff \varsigma_{u,h}(X) < +\infty, \forall X \in \overline{\Omega}$ .

(iii)  $\mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h)$  si et seulement si la fonction  $\frac{u - \psi + th}{t^2/2}$  épiconverge quand  $t \downarrow 0$ .

**Preuve :** ♦ Par définition  $w \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h)$  si et seulement si  $\text{dist}(u + th + \frac{t^2}{2}w, \mathbb{K}) = o(t^2)$ ,  $t > 0$ . Posons  $f_t := w + \frac{u - \psi + th}{t^2/2}$ , alors

$$w \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) \iff \inf_{X \in \overline{\Omega}} (f_t(X)) \geq o(1) \iff \liminf_{t \downarrow 0} \left( \inf_{X \in \overline{\Omega}} (f_t(X)) \right) \geq 0.$$

En vertu du lemme 4.4.1  $\text{e-lim inf}_{t \downarrow 0} f_t = w + \text{e-lim inf}_{t \downarrow 0} \frac{u - \psi + th}{t^2/2}$ , découle (4.21).

Remarquons que l'ensemble de coïncidence est un compact qui est l'union disjointe de son

bord  $\partial\mathcal{I}$  et de son intérieur  $\text{int}(\mathcal{I})$ . Traitons le cas  $u(X) > \psi(x)$ . Il existe alors  $\varepsilon, \delta > 0$  tels que  $(u - \psi)(X') \geq \varepsilon$  et  $h(X') > 0$  pour  $X'$  assez proche de  $X$ , et

$$\text{e-lim inf } \frac{u - \psi + th}{t^2/2}(X) \geq \text{e-lim inf } \frac{\varepsilon + t\delta}{t^2/2} = +\infty \implies \varsigma_{u,h}(X) = -\infty.$$

De façon similaire pour  $(u - \psi)(x) = 0$ , on prend dans la précédente inégalité  $\varepsilon = 0$ ,  $\delta > 0$  pour obtenir  $\varsigma_{u,h}(X) = -\infty$ .

Montrons (ii). Si  $\varsigma_{u,h}(X) = +\infty$  pour un certain  $X \in \Omega$  l'ensemble  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \emptyset$ . Réciproquement, puisque l'épilimite de fonctions continues est s.c.i. Donc  $\varsigma_{u,h}$  est s.c.s. donc par la compacité de  $\overline{\Omega}$ , si  $\varsigma_{u,h}(X) < +\infty$  pour tout  $X \in \Omega$  l'ensemble  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) \neq \emptyset$ . ♦

**Remarque 4.4.1** Grâce à l'injection de l'espace  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  dans l'espace des fonctions continues  $C^0(\overline{\Omega})$  nous déduisons la caractérisation des espaces tangents à l'ordre deux dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ , pour  $\dim \Omega \leq 3$ .

**Théorème 4.4.3** Soient  $\mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$   $\mathbb{K} := \mathbb{K}_\psi$  avec  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $u \in \mathbb{K}$  et  $h \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I} = \{u = \psi\}\}$  Alors :

(i) L'ensemble tangent intérieur d'ordre 2 s'écrit

$$\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \{w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / w(X) \geq \varsigma_{u,h}(X), \forall X \in \overline{\Omega}\}, \quad (4.23)$$

avec  $\varsigma$  défini par (4.22).

(ii)  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) \neq \emptyset \iff \varsigma_{u,h}(X) < +\infty, \forall X \in \overline{\Omega}$ .

(iii)  $\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h)$  si et seulement si la fonction  $\frac{u - \psi + th}{t^2/2}$  épiconverge quand  $t \downarrow 0$ .

**Preuve :** ♦ De l'injection continue de  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$  dans l'ensemble des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$  (en dimension  $\leq 3$ ), il vient que l'ensemble tangent à l'ordre 2 intérieur en  $(u, h)$  est l'intersection de  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$  avec l'espace tangent intérieur à l'ordre 2 des fonctions continues (4.21). Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / w \geq \varsigma_{u,h}$  sur  $\overline{\Omega}$ . Puisque les éléments de  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$  sont continus sur  $\overline{\Omega}$  (en dimension  $\leq 3$ ), alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists t > 0$  tels que :

$$\min_{X \in \Omega} \left( u + th + \frac{t^2}{2}(w + \varepsilon\eta) - \psi \right)(X) \geq \varepsilon\eta + o(t^2)$$

avec  $0 \leq \eta \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\eta \equiv 1$  sur  $\partial\mathcal{I} \subset \overset{\circ}{\Omega}$  car  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , i.e.  $\eta$  est une fonction plateau sur la zone de contact.

Ainsi  $(w + \varepsilon\eta) \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , d'où  $(w + \varepsilon\eta) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^2}} w$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Du coup  $w \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h)$ . Le reste suit. ♦

**Commentaires 4.4.3** • Désignons par  $\overline{\Omega}$  un segment, par  $\mathbb{K} := \{v \in C^0(\overline{\Omega}) / v \geq -1 \text{ sur } \Omega\}$ , et soit  $\mathbb{K}_{-1} = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq -1 \text{ sur } \Omega\}$ .

Supposons que la zone de contact soit réduite à un singleton  $\mathcal{I} = \{x_0\}$ , et que  $u \in C^2(\Omega)$ , avec  $u''(x_0) > 0$  (matrice hessienne définie positive!). Soit  $h \in \mathsf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap C^1(\Omega)$  et tel que  $h(x_0) = 0$ . Alors pour cette situation nous trouvons ([20], exemple 4.152) :

$$\mathsf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \mathsf{T}_{\mathbb{K}}^2(u, h) = \{w \in C^0(\overline{\Omega}) / w(x_0) \geq h'(x_0)[u''(x_0)]^{-1}h'(x_0)\}.$$

Ce qui implique que l'ensemble tangent à l'ordre 2 en  $(u, h)$  sur  $\mathbb{K}_{-1}$  est contenu dans l'ensemble  $\{w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / w(x_0) \geq h'(x_0)[u''(x_0)]^{-1}h'(x_0)\}$ , qui ne contient pas la fonction nulle pour un ensemble dense de  $h$  ! Il n'y a donc pas polyédricité étendue pour le problème d'obstacle pour la poutre encastree (4.6) dans le cas du contact ponctuel (tangent) !

- Il est facile d'obtenir  $\theta(x) = +\infty$ , donc la vacuité de l'ensemble tangent intérieur à l'ordre 2, par exemple avec  $u \stackrel{x_0^+}{\sim} (x - x_0)^3$  et  $h(x_0) \stackrel{x_0}{\sim} (x - x_0)$ . Ce cas de figure correspond pour le problème d'obstacle pour la poutre encastree (4.6) à un contact ponctuel à l'ordre 2, c'est à dire avec raccord des courbures entre l'obstacle et la poutre comme dans l'Exemple 4.2.1 !

**Exemple 4.4.1** Donnons un cas où il y a *polyédricité étendue* (au sens de la définition 4.4.3) pour le problème d'obstacle (3.2), sans qu'il y ait polyédricité ponctuelle. Pour cela considérons  $\Omega$  le disque unité du plan,  $\psi = -1$  et  $F_t = -t\delta_0$ . Avant contact la solution axisymétrique est :

$$r \mapsto U_t(r) = -\frac{t}{8\pi}((1 - r^2) + r^2 \ln(r)), \text{ pour } 0 \leq t \leq 16\pi,$$

Avec contact affleurant en  $(0, 0)$  pour  $t = 16\pi$ . Alors, nous savons d'après la sous-section 3.2.3, que pour  $t > 16\pi$ , la zone de contact est le point  $(0, 0)$  avec une réaction non-nulle, et la solution est radiale :

$$U_t(r) = -2\left(\frac{1}{2}(1 - r^2) + r^2 \ln(r)\right).$$

Dans ces conditions, pour tout  $Z \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(U_{16\pi}) := \{Z \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / Z(0, 0) \geq 0\} \cap C^1(\Omega)$  tel que  $Z(0, 0) = 0$ , il vient que le  $\theta$ -terme caractérisant l'espace tangent intérieur à l'ordre 1 est en  $(0, 0)$  :

$$\theta_{U_{16\pi}, Z}(0, 0) = \limsup_{\substack{X' \rightarrow (0, 0) \\ (U_{16\pi} + 1)(X') > 0}} \frac{([-Z(X')]_+)^2}{2(U_{16\pi}(X') + 1)} = 0,$$

donc par densité  $0 \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(U_{16\pi}, Z)$ , pour tout un ensemble dense de  $Z$ . Notons que la réaction  $\mu_t = \Delta^2 U_t - F_t$  croît avec  $t$ , mais  $U_t = U_{16\pi}$  pour tout  $t \geq 16\pi$ .

Bien entendu avec  $F_t$  la solution  $U_t \notin C^2(\Omega)$ .

#### 4.4.2 Estimations supérieures et inférieures à l'ordre 2 (cas convexe)

L'analyse de sensibilité de problèmes d'optimisation paramétrés, a été partiellement explorée dans le cadre général d'espaces de Banach par H. KAWASAKI [79], R. COMINETTI [41], J.-F. BONNANS, A. SHAPIRO [20]. En procédant par « dualité convexe » ils ont obtenu des résultats qui nous concernent quant à la différentiabilité directionnelle des projecteurs sous l'hypothèse de polyédricité étendue sur  $\mathbb{K}$ , un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ .

**Remarque 4.4.2** Nous choisissons de nous placer ici dans le cadre Hilbertien d'un problème d'optimisation convexe<sup>5</sup> afin d'assurer l'existence d'une solution globale, ce qui suffit à notre objectif immédiat d'étude des problèmes d'obstacle pour la poutre et la plaque linéaires. Mais

<sup>5</sup>i.e. d'un problème de la forme  $\min_{v \in \mathbb{K}} J(v, t)$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{K}$  et  $\mu \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ , le lagrangien associé  $\mathcal{L}(\cdot, \mu, t)$  soit convexe.

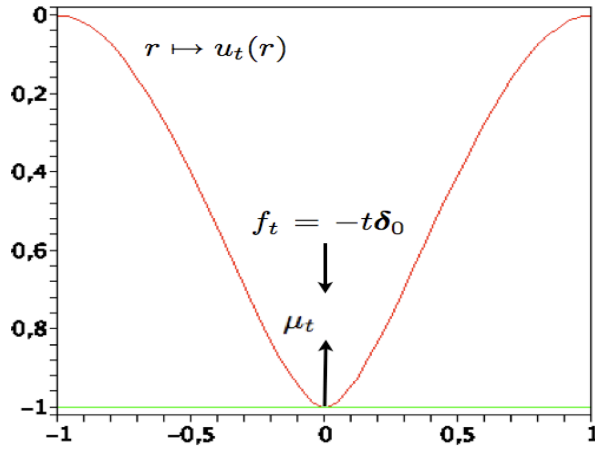


FIG. 4.8 – Déflexion d'une plaque circulaire encastree sous un chargement  $F_t = -t\delta_0$  avec réaction ponctuelle.

en fait nous pourrions nous placer dans un cadre Banachique avec une fonctionnelle plus générale [20], ce qui demanderait de prendre certaines précautions. Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

Dans le but de comprendre l'analyse de sensibilité (i.e. les propriétés différentielles de la fonction valeur optimale et des valeurs optimales) de (4.19) associé à une fonctionnelle  $J$  de classe  $C^2$  et convexe (i.e.  $\mathbf{H} = \nabla_v J(\cdot)$ ), nous définissons les problèmes approchés linéaire ( $L$ ) et quadratique ( $Q$ ) associés au lagrangien :

$$\mathcal{L}(v, \mu, t) := J(v, t) + \langle \mu, v \rangle_{\mathbb{H}}$$

$$\min_{z \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(u_0)} \partial_v J(u_0, 0)(z, 1) \quad (L)$$

il s'agit d'une « linéarisation » du problème :  $\min_{v \in \mathbb{K}} J(v, t)$ .

$$\min_{z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} \text{Val}(L_z) \quad (Q)$$

où  $L_z$  est défini par

$$\min_{w \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)} \partial_v J(u_0, 0)(w, 1) + \partial_v^2 J(u_0, 0)(z, 1)^2 \quad (L_z)$$

Enfin, définissons le problème quadratique réduit :

$$\min_{z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} \partial_v^2 \mathcal{L}(u_0, \mu_0, 0)(z, 1)(z, 1) \quad (QR)$$

Notre motivation tient en les observations suivantes.

Nous appelons *chemin admissible* toute application  $t \mapsto u_t \in \mathbb{K}$ , et  $u_t \xrightarrow{t \downarrow 0} u_0$ , avec  $t > 0$ .

Supposons alors que nous ayons un chemin admissible de la forme  $u_t = u_0 + tz + o(t)$ , alors  $z \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(u_0)$  et la valeur optimale vérifie :

$$\text{Val}(u_t) \leq J(u_t, t) = J(u_0, 0) + t\partial_t J(u_0, 0)z + o(t),$$

ce qui suggère que :  $Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + o(t)$ .

De même en imposant  $z \in T_{\mathbb{K}}(u_0)$ , et en considérant un chemin admissible (au second ordre) de la forme  $u_t = u_0 + tz + \frac{t^2}{2}w + o(t^2)$ , nous tirons  $w \in T_{\mathbb{K}}^2(u_0)$  et en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 2 suivant ( $J$  étant supposée de classe  $C^2$ ) :

$$J(u_t, t) = J(u_0, 0) + t\partial_t J(u_0, 0)z + \frac{t^2}{2} \left[ \partial_t J(u_0, 0)w + \partial_t^2 J(u_0, 0)(z, z) \right] + o(t^2), \quad (4.24)$$

il vient

$$Val(u_t) \leq J(u_t, t) = J(u_0, 0) + tVal(L) + t\partial_t J(u_0, 0)z + \frac{t^2}{2} \left[ \partial_t J(u_0, 0)w + \partial_t^2 J(u_0, 0)(z, z) \right] + o(t^2),$$

ce qui laisse présager que l'on puisse avoir :  $Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2}Val(Q) + o(t)$ .

Pour prouver ces estimations supérieures il suffit de montrer que chaque  $z \in T_{\mathbb{K}}(u_0)$  admet une  $o(t)$ -correction telle que  $u_t = u_0 + tz + o(t) \in T_{\mathbb{K}}(u_0)$ ; et de façon similaire que chaque  $w \in T_{\mathbb{K}}^2(u_0)$  admet une  $o(t^2)$ -correction telle que  $u_t = u_0 + tz + \frac{t^2}{2}w + o(t^2) \in T_{\mathbb{K}}^2(u_0)$ . C'est ce que nous allons faire à présent.

**Définition 4.4.5** Pour tout sous ensemble  $K \subset X$ , nous appelons **fonction d'appui** de l'ensemble  $K$  (ou  $\sigma$ -terme), la fonction  $\sigma : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  telle que

$$\sigma(u^*, K) := \sup_{u \in K} \langle u^*, u \rangle$$

Si l'ensemble  $K = \emptyset$ , alors  $\sigma(u^*, K) = -\infty$ .

**Commentaires 4.4.4** Si  $K = T_{\mathbb{K}}^2(u, h) \ni 0$  alors

$$\sigma(\mu, T_{\mathbb{K}}^2(u, h)) = \begin{cases} 0, & \text{si } u^* \in N_{\mathbb{K}}(u), \text{ et } \langle u^*, h \rangle = 0, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, le  $\sigma$ -terme est nul si  $\mu = 0$  (la réaction est nulle) ou encore si la condition de polyédricité étendue est vérifiée.

De plus, pour tout sous ensemble convexe  $K$  de  $X$ ,  $\mu \in X^*$ , et  $u \in K$ , la fonction  $-\sigma(\mu, T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, \cdot))$  est bien définie comme une fonction s.c.s., négative et **convexe** (voir [20], Proposition 3.48).

Rappelons qu'une condition nécessaire du second ordre due initialement à H. KAWASAKI [79] et raffinée par R. COMINETTI voir [41]) s'énonce :

**Théorème 4.4.4** Soit  $u_0$  une solution de (4.19) associé à une fonctionnelle  $J$  de classe  $C^2$  et convexe telle que  $H = \nabla J(\cdot)$ , alors pour tout  $z \in Cr_{\mathbb{K}}(u_0)$  et tout ensemble convexe  $K(z) \subset T_{\mathbb{K}}^2(u_0, z)$  :

$$\mathcal{L}''(u_0, \mu_0)(z, z) - \sigma(\mu_0, K(z)) \geq 0. \quad (4.25)$$

On montre alors le Théorème suivant par « dualité convexe », en suivant la méthode exposée dans [18] (ou plus généralement dans [20] paragraphe 4.7.1) :



**Théorème 4.4.5** *Considérons un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ ,  $J(., t) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction convexe de classe  $C^2$  propre et  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$  un convexe fermé non vide. Alors en notant  $u_0$  une solution optimale pour  $t = 0$  de*

$$\min_{v \in \mathbb{H}} (J(v, t) + \mathbb{I}_{\mathbb{K}}(v)) \quad (4.26)$$

$$Val(Q) := \min_{z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} Val(L_z) = \min_{z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} \partial_v^2 \mathcal{L}(u_0, \mu, 0)(z, 1)(z, 1) - \sigma(\mu, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z))$$

**Preuve :** ♦ Les hypothèses imposées sur  $J(., t)$  assure que la solution optimale  $u_t$  existe (Théorème 9.5.5 de [10]) pour tout  $t$ . Le calcul de la conjuguée de Legendre-Fenchel<sup>6</sup> de  $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$  vérifie  $(\mathbb{I}_{\mathbb{K}})^*(\mu) = \sigma(\mu, \mathbb{K})$ . Il en vient que le problème dual de (4.26) s'écrit

$$\mathcal{L}''(v, \mu) - \sigma(\mu, \mathbb{K}).$$

La fin de la preuve du Théorème 4.4.5 découle de l'application du résultat classique suivant :

**Théorème 4.4.6** [20] *Considérons  $\Theta(y) := \inf\{\varphi(x, y) \mid x \in \mathbf{X}\}$  où  $\varphi : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction s.c.i. convexe propre, avec  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  deux espaces de Banach, et  $\mathbb{R}^+ \bigcup_x \varphi(x, \cdot) = \mathbf{Y}$ . Alors  $\theta$  est continue dans un voisinage de 0 et  $\Theta(0) < \infty$ . En particulier  $\Theta(0) = \Theta^{**}(0)$ , ce qui peut être écrit sous la forme suivante*

$$\inf_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, 0) = - \min_{y^* \in \mathbf{Y}^*} \varphi^*(0, y^*),$$

avec l'ensemble des solutions du minimum de droite égal au sous-différentiel  $\partial\Theta(0)$ , qui est non-vidé et \*-faiblement compact quand  $\Theta(0)$  est fini et égal à l'espace  $\mathbf{Y}^*$  tout entier si  $\Theta(0) = -\infty$ .

Il suffit de poser

$$\varphi(w, y) := \begin{cases} \partial_v J(u_0, 0)(w, 1) + \partial_v^2 J(u_0, 0)(z, 1)^2 & \text{si } w + y \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.27)$$

pour conclure que  $Val(L_z) = -\min_{\mu} \varphi^*(0, \mu)$  où la duale de Legendre-Fenchel de  $\varphi$  est donnée par :

$$\varphi^*(0, \mu) := \begin{cases} \sigma(\mu, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) - \partial_v^2 \mathcal{L}(u_0, \mu, 0)(z, 1)^2 & \text{si } \partial_v \mathcal{L}(u_0, \mu, 0) = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.28)$$

♦

Nous disposons alors des bornes supérieure et inférieure suivantes de la fonction valeur optimale :

---

**Définition 4.4.6** [10] *Soit  $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction s.c.i. convexe propre sur un espace de Banach. La conjuguée de Legendre-Fenchel de  $F$  est la fonction*

$$F^* : \mathbf{X}^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

définie par

$$F^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle - F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}.$$

**Théorème 4.4.7** [18] Avec les hypothèses et notations du Théorème 4.4.5, notons  $u_t$  un chemin  $o(t^2)$ -optimal de (4.26) avec  $u_t = u_0 + O(t)$ . Alors

- nous avons les estimations supérieures suivantes :

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{Val(u_t) - Val(u_0)}{t} \leq Val(L) \quad (4.29)$$

$$\text{et } Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + o(t).$$

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{Val(u_t) - Val(u_0) - tVal(L)}{t} \leq Val(Q) \quad (4.30)$$

$$\text{et } Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2}Val(Q) + o(t^2).$$

- Et nous avons l'estimation inférieure suivante :

$$Val(u_t) \geq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2}Val(QR) + o(t^2). \quad (4.31)$$

**Remarque 4.4.3** En général il y a un *saut* entre l'estimation supérieure et inférieure qui est dû au fait que l'estimation inférieure ne prend pas en compte la possible courbure du convexe  $\mathbb{K}$ , car elle ne tient pas compte du  $\sigma$ -terme [41]. C'est ainsi qu'en rassemblant ces deux estimations sous l'hypothèse de polyédricité étendue (sans contribution du  $\sigma$ -terme) que l'on obtient le résultat suivant de F. BONNANS & R. COMINETTI [18], pour le projecteur métrique.

**Théorème 4.4.8** Etant donné un convexe fermé  $\mathbb{K}$  non vide d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Sous la condition de polyédricité étendue en  $u_0$ , la valeur optimale de la projection orthogonale de  $u_t^b = u_0^b + th \in \mathbb{H}$  sur  $\mathbb{K}$

$$Val(u_t) := \|u_t - u_t^b\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|u_t^b - v\|_{\mathbb{H}},$$

vérifie :

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{Val(u_t) - Val(u_0) - tVal(L)}{t^2/2} = Val(Q) = Val(QR), \quad (4.32)$$

et  $u_t := \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u_t^b)$  admet le (C-)développement limité suivant :

$$u_t = u_0 + tz_0 + o(t), \text{ avec } t \geq 0, \quad (4.33)$$

avec  $z_0 = \mathbf{pr}_{\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)}(h)$  l'unique solution du problème

$$\inf_{z \in \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} \|z - h\|_{\mathbb{H}}.$$

**Remarque 4.4.4** Avec les hypothèses et notations du Théorème 4.4.5 le Théorème 4.4.8 reste valable pour (4.26) si la condition de polyédricité étendue est vérifiée [18].

**Remarque 4.4.5** En général, il n'y a pas polyédricité étendue pour les convexes de déplacements cinématiques admissibles dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$ , comme le montre l'exemple du paragraphe 4.2.1. En effet, commentons les résultats que nous avons obtenus quand la poutre touche l'obstacle.

- pour  $\frac{16}{120} \leq t \leq \frac{16}{24}$  la poutre touche l'obstacle en un point  $X = (0,0)$ , et le contact est tangent à l'ordre 1 (non-raccord des courbures de la poutre et de l'obstacle). Pour  $t = \frac{16}{120}$  le contact est affleurant, pour  $t > \frac{16}{120}$  le contact est franc (la réaction est non-nulle). Du coup, pour  $\mu_t \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u_t)$ , l'inclusion  $\overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_t) \cap (\mu_t)^\perp}^{\mathbb{H}} \subset \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_t)$  est stricte. On a  $\overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_t) \cap (\mu_t)^\perp}^{\mathbb{H}} = \{v \in \mathbb{H} / v(0) = 0, v'(0) = 0\}$  et le cône critique  $\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_t) = \{v \in \mathbb{H} / v(0) = 0\}$ . Il n'y a pas polyédricité, ni même polyédricité étendue car l'espace tangent intérieur d'ordre 2 ne contient pas 0 pour un ensemble dense d'éléments de  $\mathbb{H}$ . Il est non vide pour  $t < \frac{16}{24}$ . Pour  $t = \frac{16}{24}$  la courbure de la poutre est annulée, il raccorde tangent à l'ordre 2 entre la poutre et l'obstacle bien qu'il n'y ait contact qu'en le point  $X = (0,0)$ . Il n'y a toujours pas polyédricité, de plus l'espace tangent à l'ordre 2 est ici vide.
- pour  $t > \frac{16}{24}$  la poutre touche effectivement l'obstacle suivant un segment  $[-r_t, +r_t]$  avec  $r_t := \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ . Dans ce cas il y a polyédricité.

**Remarque 4.4.6** Soulignons que la polyédricité de  $\mathbb{K}$  en  $u_0$  solution de (4.26) entraîne la condition de polyédricité étendue est vérifiée en  $u_0$ , i.e.  $0 \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u_0, h)$ , pour un ensemble dense de  $h \in \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)$ .

**Commentaires 4.4.5** Le Théorème 4.4.8 assure que, sous la condition de polyédricité étendue, l'opérateur de projection sur un convexe fermé non vide, admet un développement limité. Il en va de même pour la solution du problème de l'obstacle pour une poutre ou une plaque élastique en petites déformations vue comme la composition de  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$  avec l'inverse de l'opérateur bilaplacien. Le concept de polyédricité étendue nous permet d'affirmer que la solution de l'exemple 4.4.1, est dérivable par rapport au chargement  $F_{16\pi}$  d'après Théorème 4.4.8 alors que la configuration géométrique de la zone de contact interdit la polyédricité. De plus la présentation de ce Théorème nous a permis d'introduire les problèmes auxiliaires et le cadre nécessaires à notre approche de la sensibilité à l'ordre 2.

## 4.5 Etude de sensibilité à l'ordre 2 dans le problème d'obstacle pour une poutre

Comme nous allons nous référer à des outils issus du domaine de la commande optimale<sup>7</sup>, il paraît naturel de faire le lien entre la terminologie qu'elle utilise et celle de la mécanique. Le problème (4.6) régissant l'équilibre d'une poutre linéaire élastique, occupant au repos un domaine  $\bar{\Omega} := [-1, -1]$ , encastrée sur son bord  $\partial\Omega$ , placée au dessus d'un obstacle rigide  $\psi \in C^4(\bar{\Omega})$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , alors qu'elle est soumise à un chargement variable  $t \mapsto f_t := f_0 + th \in L^2(\Omega)$

est équivalent à la minimisation sur  $\mathbb{K}_\psi$  de la fonction coût (l'énergie totale), notée

$$J(v, t) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (v'')^2 - f_t v \right) d\Omega$$

L'unique solution (l'optimum)  $u_t \in \mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  représente l'état de la poutre (le déplacement),

<sup>7</sup>le lecteur peut se référer à [92] pour une introduction à la théorie du contrôle des EDP.

---

$f_t$  est la *commande* (la force).

**Objectifs :** Lorsque la solution  $u_0$  a un nombre fini de points de contact francs isolés sans raccord des courbures, et lorsque l'hypothèse de contact franc est satisfaite, nous donnons des conditions d'optimalité du second-ordre nécessaires et suffisantes pour le problème (4.6), et par le calcul du terme de courbure de Kawasaki nous explicitons les estimations supérieure et inférieure à l'ordre 2 de la fonction valeur optimale. En conséquence les dérivées directionnelles de  $u_0$  sont obtenues comme solutions d'un certain problème quadratique ( $Q$ ).

Pour ce faire il est alors nécessaire de nommer précisément les composantes de la zone de contact, qui comme nous le savons peut être quelconque si nous ne faisons d'hypothèse sur la nature du chargement ou la forme de l'obstacle.

**Définition 4.5.1** *Les points de contacts isolés qui composent  $\mathcal{I}(f_t) := \{X \in \Omega / u_t(X) = \psi(X)\} = \mathcal{I}_t$  forment un ensemble appelé ensemble de points de contact noté  $\mathcal{T}_t := \partial(\mathcal{I}(f_t) \setminus \text{int}(\mathcal{I}(f_t)))$ . Un point de contact  $X$  est dit essentiel, si le multiplicateur de Lagrange  $\mu_0$ , satisfait  $[\mu_0(X)] > 0$ , (i.e. si la mesure de réaction  $\mu_0$  le charge). L'ensemble des points de contact essentiel pour la solution  $u_t$  est noté  $\mathcal{T}_t^{\text{ess}} := \mathcal{T}_t \cap \text{Supp}(\mu_t)$ . Nous disons que l'ensemble de contact  $\mathcal{I}(f_0)$  a une structure finie si le support de la réaction  $\text{Supp}(\mu_0)$  est une union finie disjointe de points de contact et une union finie disjointe de segments.*

**Remarque 4.5.1** Un point de contact isolé essentiel correspond à une discontinuité de la mesure de réaction (i.e. du multiplicateur  $\mu$ ) qui est une fonction croissante, donc il n'existe au plus qu'un ensemble *dénombrable* de points de contact isolés essentiels. Ceci exclut en particulier qu'il y ait contact franc sur des parties fractales (type Cantor).

Rappelons que le Lagrangien associé à (4.6) est  $\mathcal{L}(v, \mu, t) := J(v, t) + \langle \mu, v \rangle$ , nous omettrons la variable  $t$  dans  $\mathcal{L}$  et  $J$  quand cela n'induera pas d'ambiguïté.

Nous allons commencer par nous placer sous les hypothèses suivantes :

**(H1) Hypothèse de contact franc sur l'intérieur de l'ensemble de contact :**

$$\text{int}(\mathcal{I}_0) \subset \text{supp}(\mu_0). \quad (4.34)$$

Notons que l'hypothèse de contact franc ne concerne pas les points de touche. Elle est équivalente à la condition de non-dégénérescence :  $\psi^{(4)} - f_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}_0$ . Remarquons que si  $\text{Supp}(\mu_0) \subset \mathcal{I}^2(f_0, z)$ , alors  $\sigma(\mu, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) \geq 0$ .

**(H2) Hypothèse de contact tangent à l'ordre 1 sur l'ensemble des points de contact essentiel :**

$$\forall X \in \mathcal{T}_0^{\text{ess}}, \quad \frac{d^2}{dX^2}(u_0 - \psi)(X) > 0. \quad (4.35)$$

**(H3) Hypothèse de finitude des composantes connexes de  $\mathcal{I}_0$  :**

$$\mathcal{I}_0 \text{ est une union finie d'intervalles et l'ensemble des points de contact essentiel } (\mathcal{T}_0^{\text{ess}}) \text{ est fini.} \quad (4.36)$$

**Remarque 4.5.2** Nous traitons le cas d'une poutre encastrée, mais nous pourrions faire de même avec une poutre simplement appuyée à ses extrémités pour autant que l'on ait  $\psi < u_0$  sur  $\partial\Omega$ . Sous les hypothèses **(H2)**-**(H3)**, la réaction  $d\mu_0 := u_0^{(4)} - f_0$  se décompose de la façon suivante :

$$d\mu_0(X) = \tilde{\mu}_0(X)d\Lambda_1 + \mu_{I,0}(X).$$

La densité (par rapport à la mesure de Lebesgue linéique),  $\tilde{\mu}_0 \in L^1(\Omega)$  est la dérivée (de Radon-Nikodym) de  $\mu_0$  par rapport à  $\Lambda_1$ .

La partie atomique de la réaction s'écrit  $\mu_{I,0} := \sum_{X \in \partial\mathcal{I}_0} \mu_0^X \delta_X$ , où  $\mu_0^X := [\mu_0(X)]$  est le saut positif<sup>8</sup> en  $X \in \partial\mathcal{I}_0$ , et  $\delta_X$  la mesure de Dirac en  $X$ .

Nous définissons les problèmes approchés linéaires et quadratiques associés à (4.6) :

$$(L) \quad \min_{z \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u_0)} J'(y_0)z$$

linéarisation conique de (4.6), avec  $Sol(L) := \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)$ , et

$$(Q) \quad \min_{z \in \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} \min_{w \in \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u_0, z)} J'(u_0)w + J''(u_0)(z, z).$$

Par le Théorème 4.4.5 de dualité convexe, le Théorème 4.4.3 caractérisant le  $\sigma$ -terme, et grâce au développement de Taylor (4.24) on déduit que le problème quadratique (Q) associé à (4.6), pour  $t = 0$  s'écrit :

$$\inf_{z \in \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (z'')^2 - hz \right) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{I}_0} \theta_{z, u_0} d\mu. \quad (4.37)$$

**Remarque 4.5.3**  $Val(Q) < +\infty$  si et seulement s'il existe  $z \in Sol(L) = \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)$  tel que  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}^2(u_0, z) \neq \emptyset$ . Puisqu'on a établi que l'espace tangent à l'ordre deux est toujours non vide sous les hypothèses **(H1)**-**(H4)** ci-dessus, alors  $Val(Q) < +\infty$ . On en déduit alors que  $Val(Q)$  est finie. Le sigma terme étant de la forme :

$$\sigma(-\mu, \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) = - \int_{\Omega} \varsigma_{u_0, z}(X) d\mu(X). \quad (4.38)$$

---

<sup>8</sup>i.e.  $[\mu_0(X)] = \mu_0(X^+) - \mu_0(X^-)$  où  $\mu_0(X^\pm) = \lim_{\xi \rightarrow X^\pm} \mu_0(\xi)$

**Théorème 4.5.1** *Plaçons nous sous les hypothèses **(H1)**-**(H3)**, et imposons  $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ , et  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ . Soit  $f_t := f_0 + th$  avec  $f_0, h \in L^2(\Omega)$  Soit  $u_0$  la solution de (4.6) associée à  $f_0$ , alors pour tout  $z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)$  nous avons la condition nécessaire :*

$$\mathcal{L}''(u_0, \mu_0)(z, z) - \sigma(\mu_0, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) \geq 0. \quad (4.39)$$

*Réciproquement, nous avons la condition suffisante :*

$$\mathcal{L}''(u_0, \mu_0)(z, z) - \sigma(\mu_0, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) > 0, \quad \forall z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0) \setminus \{0\}. \quad (4.40)$$

*En particulier nous avons l'estimation supérieure suivante de la fonction valeur optimale :*

$$\text{Val}(u_t) - \text{Val}(u_0) - tDJ(u_0)h \leq \frac{t^2}{2}\text{Val}(Q) + o(t^2) \quad (4.41)$$

*Réciproquement, nous avons l'estimation inférieure complémentaire :*

$$\text{Val}(u_t) - \text{Val}(u_0) - tDJ(u_0)h \geq \frac{t^2}{2}\text{Val}(Q) + o(t^2) \quad (4.42)$$

*En outre, si on désigne par  $u_t$  une  $o(t^2)$ - solution. Alors  $z_t := \frac{u_t - u_0}{t} \longrightarrow z_0$  en norme et satisfait le problème (4.37), ce qui fournit le développement suivant :*

$$u_t = u_0 + tz_0 + o(t). \quad (4.43)$$

*Autrement dit  $z_0(\cdot) := u'_0(\cdot; h)$  solution de (4.37) vérifie le problème aux limites suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h + \sum_{X \in \mathcal{T}_0} \theta_{u_0, z_0}(X) \mu_0^X \delta_X & \text{sur } \Omega \setminus (\mathcal{I}(f_0) \setminus \mathcal{T}_0) \\ z_0 = 0 = z'_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ z'_0 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}(f_0) \setminus \mathcal{T}_0 \\ z_0 = 0 & \text{sur } \mathcal{I}(f_0) \setminus \mathcal{T}_0 \end{array} \right. \quad (4.44)$$

avec  $\theta_{u_0, z_0}(X_0) = \frac{(Dz_0(X_0))^2}{[D^2(u_0 - \psi)]}$ .

**Preuve :** ♦ La preuve se fait en quatre étapes.

1) *Finitude du sigma-terme*

Commençons par nous assurer que pour tout  $X_0 \in \partial\mathcal{I}(u_0)$ , nous avons  $\varsigma_{u_0, z}(X_0) < +\infty$ .

En effet, d'après la définition de  $\varsigma_{u_0, z}$  (4.22), seuls les points de  $\partial\mathcal{I}(u_0) \cap \mathcal{I}^2(u_0, z)$  contribuent au sigma-terme.

Puisque  $\mathcal{I}_0$  est compact et d'après l'hypothèse **(H3)**  $\overline{\mathcal{I}_0}$  est une réunion finie de « vrais » intervalles, donc  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible. Construisons une solution  $\tilde{u}_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  de (4.6) ayant pour zone de contact l'ensemble  $\tilde{\mathcal{I}_0}$ , associée à  $\tilde{f}_0 = f_0 - \mu_{I,0} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ . Alors d'après la Remarque (4.4.6)  $\varsigma_{\tilde{u}_0, z}(X_0) = 0$ , pour tout un ensemble de  $z$  critique, et comme  $u_0$  et  $\tilde{u}_0$  coïncident sur un voisinage de  $\overline{\mathcal{I}_0}$  donc  $\varsigma_{u_0, z}(X_0) = 0$ , pour tout un ensemble de  $z$  critique.

Pour les points de contact isolés essentiels  $X_0 \in \mathcal{T}_0^{\text{ess}}$ ,  $z(X) \overset{X_0^+}{\sim} \alpha^+(X - X_0)$  (resp.  $z(X) \overset{X_0^-}{\sim}$

$\alpha^-(X - X_0)$  ) et  $(u_0 - \psi)(X) \stackrel{X_0^+}{\sim} \beta^+(X - X_0)^2$  (resp.  $(u_0 - \psi)(X) \stackrel{X_0^-}{\sim} \beta^-(X - X_0)^2$ ). Grâce à **(H2)**, en posant  $\alpha := \min(\alpha^+, \alpha^-)$  et  $\beta := \min(\beta^+, \beta^-)$

$$\theta_{u_0,z}(X_0) = \frac{[-\alpha]_+^2}{2\beta} = \frac{(Dz(X_0))^2}{[D^2(u_0 - \psi)]}.$$

Ceci assure que  $\varsigma_{u_0,z}(X_0)$  est fini, et s'écrit :

$$\sigma(\mu_0, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{I}}_0} \varsigma_{u_0,z}(X) \tilde{\mu}_0(X) d\Lambda_2(X) + \sum_{X \in \mathcal{T}_0^{ess}} \mu_{I,0}^X \varsigma_{u_0,z}(X),$$

soit après simplifications (puisque le premier terme est nul sur  $\overset{\circ}{\mathcal{I}}_0$ ) :

$$\sigma(\mu_0, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) = \sum_{X \in \mathcal{T}_0^{ess}} \mu_{I,0}^X \theta_{u_0,z}(X).$$

2) *Le problème a une valeur optimale finie*

En effet le problème (4.37) (i.e. (Q)) est fortement convexe (comme somme de deux fonctions convexes ; voir le Commentaire (4.4.4) pour la convexité du  $\sigma$ -terme) et s.c.i. sur un convexe fermé, donc (Q) admet une solution unique<sup>9</sup>.

3) *Estimation supérieure*

D'après (4.24) nous pouvons écrire le développement à l'ordre 2 de  $J$  sous la forme :

$$J(u_t) = J(u_0) + t \int_{\Omega} h z d\Omega + \frac{t^2}{2} \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (z'')^2 - h z \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( (u_0)'' w'' - f_0 w \right) d\Omega \right] + o(t^2).$$

d'où grâce à (4.37) :

$$\frac{Val(u_t) - Val(u_0) - tDJ(u_0)h}{t^2/2} \leq \inf \left( \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (z'')^2 - h z \right) d\Omega - \int_{\partial \mathcal{I}_0} \theta z d\mu \right) + o(1)$$

donc

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{Val(u_t) - Val(u_0) - tDJ(u_0)z}{t^2/2} \leq Val(Q).$$

On en déduit que l'estimation supérieure est vérifiée, puisque  $Val(Q)$  est finie.

4) *Estimation inférieure*

Nous reformulons la contrainte  $G(v) := \psi - v \leq 0$  sur  $\Omega$ , par la méthode de réduction présentée à la section 3.4.4 de [20]. Cette approche est très proche de [19] excepté le fait que nous sommes en dimension infinie. D'une manière générale l'idée est de minorer le critère par le lagrangien. Avant cela il faut reformuler les contraintes pour tout  $X \in \Omega$  par des

contraintes "réduites" non linéaires dont le hessien permet de recoller avec le sigma terme. Traitons le cas du point de contact isolé ; on a une contrainte

$$g(u, X) \leq 0, \quad \text{pour tout } X \in \Omega$$

équivalente, au moins localement, à

$$G(u) := g(u, X(u)) \leq 0, \quad \text{avec } X(u) \text{ caractérisé par } g_{,X}(u, X(u)) = 0,$$

où  $X(u)$  est le point où  $u \mapsto g(u, X)$  atteint son maximum, tel que sous l'hypothèse  $g_{,XX}$  définie positive (assurée par (4.35)) par application du théorème des fonctions implicites :

$$g_{,uX}(u, X(u)) + g_{,XX}(u, X(u))\dot{X}(u) = 0$$

On calcule en utilisant  $g_{,X}(u, X(u)) = 0$  :

$$G'(u) = g_{,u}(u, X(u)); \quad G''(u) = g_{,uu}(u, X(u)) + g_{,uX}(u, X(u))\dot{X}(u)$$

et donc puisque  $g_{,uu}(u, X(u)) = 0$

$$G''(u) = -g_{,uX}(u, X(u))g_{,XX}(u, X(u))^{-1}g_{,uX}(u, X(u)).$$

Donc, se ramenant à la contrainte  $G(u) \leq 0$ , minorant le critère par le lagrangien avec cette dernière contrainte, on obtient bien une contribution du hessien de la contrainte correspondant au sigma terme, avec

$$(Q) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} ((z'')^2 - hz) d\Omega - \sum_{X \in T_0 \cap \text{Supp}(\mu_0)} [\mu(X)] \frac{(z'(X))^2}{((u_0 - \psi)''(X))}; \quad z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0) \right\}.$$

Grâce à la coercivité de  $J$ , pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,  $u_0$  est solution du problème  $\varepsilon$ -approché :

$$\min_{\tilde{u} \in \mathbb{K}} J^\varepsilon(\tilde{u}) := J(\tilde{u}) - \varepsilon \|\tilde{u} - u_0\|_{\mathbb{H}}^2 \quad (4.45)$$

Les problèmes (4.45) et ((4.6) ont même multiplicateur de Lagrange,  $\mu_t$ , la même contrainte et donc le même cône critique, il découle que les hypothèses **(H1)**-**(H3)** sont satisfaites pour (4.45), ainsi la conditions nécessaire est également valable pour le problème  $\varepsilon$ -approché car, en notant son Lagrangien  $\mathcal{L}^\varepsilon(u, \mu)$ ,

$$D_u^2 \mathcal{L}^\varepsilon(u, \mu)(z, z) = \mathcal{L}''(u, \mu)(z, z) - \varepsilon \|z\|_{\mathbb{H}}^2$$

donc

$$\mathcal{L}''(u_0, \mu_0)(z, z) - \sigma(\mu_0, \mathbb{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z)) \geq \varepsilon \|z\|_{\mathbb{H}}^2, \quad \forall z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0).$$

Soit  $u_t$  une  $o(t^2)$ -solution de (4.6), associée à  $f_t$ . Nous savons, d'après (3.1.2), que  $\|u_t - u_0\|_{\mathbb{H}} = O(t)$ . Alors  $z_t := \frac{u_t - u_0}{t}$  est bornée, et on note  $z_0$  sa limite faible. Puisque

$$\text{Val}(u_t) \leq J(u_0) + tDJ(u_0)z_t + \frac{t^2}{2}\text{Val}(Q) + o(t^2)$$

en lui soustrayant le développement de  $J(u_t)$  (4.24) et après division par  $\frac{1}{2}t^2$ , nous obtenons :

$$0 \leq 2t^{-1}DJ(u_0)z_t + D^2J(u_0)(z_t, z_t) \leq \text{Val}(Q) + o(1). \quad (4.46)$$



Ce qui fournit  $DJ(u_0)z_t \leq o(t)$ , et donc  $DJ(u_0)z_0 = 0$ . Comme  $z_t \in \mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0)$ , sa limite appartient donc à  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u_0)$ , ce qui fait de  $z_0$  une direction critique. De plus  $z_t \in \mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u_0)$  et la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre implique que  $DJ(u_0)z_t \geq 0$ , en utilisant la s.c.i. de  $D^2J(u_0)$ , d'après (4.46) il découle

$$D^2J(u_0)(z_0, h), (z_0, h)) \leq \liminf_{t \downarrow 0} D^2J(u_0)(z_t, h), (z_t, h)) \leq \text{Val}(Q).$$

Du fait que  $z_0 \in \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u_0)$  il vient que  $z_0$  est solution du problème (Q), d'où

$$D^2J(u_0)(z_t, h), (z_t, h)) \rightarrow D^2J(u_0)(z_0, h), (z_0, h))$$

Or  $z_t \rightharpoonup z_0$ , ce qui assure que  $D^2J(u_0)(z_t, z_t) \rightarrow D^2J(u_0)(z_0, z_0)$  puisque

$$Q(z) := \mathcal{L}''(u_0, \mu_0)(z, z) - \sigma(\mu_0, \mathbf{T}_{\mathbb{K}}^{i,2}(u_0, z))$$

est une forme de Legendre<sup>10</sup> d'après la Proposition 3.76 [20] nous obtenons alors  $z_t \rightarrow z_0$  en norme et le développement de la solution (4.43). ♦

**Commentaires 4.5.1** Certaines situations de contact ne sont pas contenues dans cette étude de sensibilité, il s'agit des points isolés avec raccord des courbures, les zones de contact ayant une infinité de composantes connexes, et les intervalles sans complémentarité stricte. Pour le calcul du  $\sigma$ -terme, nous avons imposé un nombre fini de points de contact isolés essentiels à la zone de contact. Puisque la mesure  $\mu$  est finie sur  $\Omega$ , s'il en existe une infinité (au plus dénombrable d'après la Remarque 4.5.1)  $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , alors la suite associée des sauts  $([\mu(X^k)])_k$  de la mesure tend vers 0. Aussi si la série est convergente alors la finitude du  $\sigma$ -terme dépend de la contribution du point d'accumulation  $\bar{X} := \lim_{k \rightarrow +\infty} X^k$ . Cette contribution est difficile à évaluer puisque nous ne pouvons pas effectuer de développement de Taylor  $\bar{X}$  car le numérateur et le dénominateur de  $\theta_{u_0, z_0}$  s'annulent dans tout voisinage de  $\bar{X}$  une infinité de fois<sup>11</sup> ...

Bien sûr quand la zone de contact est un « vrai » segment (sans point de contact isolé) avec complémentarité stricte, nous retrouvons le théorème de différentiabilité 4.1.4.

---

10

**Définition 4.5.2** Sur un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ , une forme quadratique  $Q$  est dite **de Legendre** si elle est faiblement séquentiellement s.c.i. sur  $\mathbb{H}$  telle que, si  $h_k \rightharpoonup h$  (faiblement) et  $Q(h_k) \rightarrow Q(h)$  alors  $h_k \rightarrow h$  en norme.

On conclut ici grâce à la proposition suivante :

**Proposition 4.5.1** [10] Dans un espace de Banach uniformément convexe pour toute suite  $(h_k)_k$  l'implication suivante est vérifiée :

$$h_k \rightharpoonup h \text{ (faiblement) et } \|h_k\| \rightarrow \|h\| \implies h_k \rightarrow h \text{ en norme.}$$

---

<sup>11</sup>Nous pouvons certainement obtenir cette situation dans (4.6) avec un chargement  $0 > t f_0 := t \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \delta_{X^k} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  avec  $X^k \rightarrow 1/2 \in \Omega := ]0, 1[$ , pour  $t > 0$  assez grand.

**Corollaire 4.5.1** *Sous les hypothèses du théorème 4.5.1, si (H1) est relaxée en imposant*

$$(\mathbf{H1}') : \overline{\text{int}(\text{supp}(\mu_0))} \text{ admissible}$$

*alors le développement (4.43) subsiste avec  $z_0$  solution de (4.37) vérifiant le problème aux limites suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h + \sum_{X \in \mathcal{T}_0^{ess}} \theta_{u_0, z_0}(X) \mu_0^X \delta_{\mathbf{X}} & \text{sur } \Omega \setminus \left( \text{supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}_0^{ess} \right) \\ z_0 = 0 = z_0' & \text{sur } \partial\Omega \\ z_0' = 0 & \text{sur } \partial \text{supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}_0^{ess} \\ z_0 = 0 & \text{sur } \text{supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}_0^{ess} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

**Exemple 4.5.1** Reprenons l'Exemple 4.2.1 d'une poutre encastree à ses bords et calculons, quand il y a contact ponctuel, les dérivées directionnelles dans la direction  $h$  du déplacement, noté  $z_0(\cdot) := u_0'(\cdot; h)$ .

Pour  $24 \leq t < 72$  la poutre touche l'obstacle en point avec une réaction ponctuelle, le contact est seulement tangent.

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h + \theta_{z_0, u_0}(0) \mu_0^0 \delta_0 & \text{sur } ]-1, 1[, \\ z_0(-1) = 0 = z_0(1) & \\ z_0'(-1) = 0 = z_0'(1) & \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Ce système peut être interprété comme la flexion d'une poutre élastique encastree, sous un chargement distribué  $h$  et un chargement localisé au point 0.

**Remarque 4.5.4** A. HERMANT [67] a montré que l'instabilité d'un point de contact isolé  $X^0$  avec raccord des courbures (i.e.  $(u - \psi)''(X^0) = 0$ , que l'on appelle aussi *non-réductible*) du problème (4.6) peut faire apparaître soit un segment soit un deuxième point de contact isolé suivant le signe du chargement appliqué, supposé dans  $L^\infty(\Omega)$ . La méthode employée repose sur une formulation hamiltonienne et une analyse du signe des relations que l'on en déduit et qui font intervenir le champ de force, les efforts tranchants et la réaction. Toutefois la question de la différentiabilité (par rapport au paramètre de perturbation  $t$ ) de la solution de (4.6), présentant ce type de point de contact isolé non-réductible, n'a pas été tranchée.

## 4.6 Etude de sensibilité dans le problème de l'obstacle pour une plaque

L'équilibre d'une plaque linéaire élastique, occupant au repos un domaine plan  $\Omega$  de classe  $C^{4,\alpha}$  encastree sur son bord  $\partial\Omega$ , placée au dessus d'un obstacle rigide  $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , alors qu'elle est soumise à un chargement variable  $t \mapsto F_t := F_0 + tH \in L^2(\Omega)$  est décrit par la minimisation (3.3) de la fonction coût (l'énergie totale, c.f. Théorème (3.1.1)) notée

$$J(V, t) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\Delta V)^2 - F_t V \right) d\Omega$$

L'unique solution (l'optimum)  $U_t \in \mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  représentant l'état de la plaque (le déplacement),  $F_t$  est la *commande* (la force). Le Lagrangien associé toujours noté  $\mathcal{L}(V, \mu, t) := J(V, t) + \langle \mu, V \rangle$ .

**Objectifs :** Comme pour le cas de la poutre (4.6), nous donnons des conditions permettant d'obtenir les dérivées directionnelles de  $U_0$  comme solutions d'un certain problème quadratique. La preuve nécessite le calcul du terme de courbure de Kawasaki. Dans le cadre posé ci-dessus il n'y a pas de points de contact isolés, cependant le contact peut avoir lieu le long de courbe, et bien sûr sans hypothèse sur la nature du chargement, la structure topologique peut être quelconque.

**Définition 4.6.1** *Les courbes qui composent la zone de contact  $\mathcal{I}(F_t)$  de (3.3) forment un ensemble dit ensemble de courbes de contact noté  $\mathcal{T}(F_t) := \partial(\mathcal{I}(F_t) \setminus \text{int}(\mathcal{I}(F_t)))$ <sup>12</sup>. Une courbe de contact est dite essentielle si la mesure de réaction  $\mu_t$  la charge. L'ensemble des courbes de contact essentielles pour la solution  $U_t$  est noté  $\mathcal{T}_t^{\text{ess}} := \mathcal{T}_t \cap \text{Supp}(\mu_t)$ .*

*Nous disons que l'ensemble de contact  $\mathcal{I}(F_0)$  a une structure finie si le support de la réaction  $\text{Supp}(\mu_0)$  est une union finie disjointe de courbes de contact et une union finie disjointe de surfaces  $\mathbb{H}^2$ -admissibles.*

Nous allons mener une analyse au second ordre sous les hypothèses suivantes :

**(H1) Hypothèse de complémentarité stricte sur l'intérieur de l'ensemble de contact :**

$$\text{int}(\mathcal{I}_0) \subset \text{supp}(\mu_0). \quad (4.49)$$

Notons que l'hypothèse de contact franc ne concerne pas les points de contact. Elle est équivalente à la condition de non-dégénérescence :  $\Delta^2 \psi - F^0 > 0$  pp sur  $\mathcal{I}_0$ .

**(H2) Hypothèse de contact tangent à l'ordre 1 sur l'ensemble des courbes de contact essentiel :**

$$\text{les courbes de contact sont des courbes de classe } C^2 \text{ et } \forall X \in \mathcal{T}_0^{\text{ess}}, \quad \partial_n^2(U_0 - \psi)(X) > 0. \quad (4.50)$$

**(H3) Hypothèse de finitude sur l'ensemble des courbes de contact essentiel :**

$$\mathcal{I}_0^{\text{ess}} \text{ a une structure finie.} \quad (4.51)$$

C'est à dire que le nombre de composantes connexes de l'ensemble des courbes de contact essentiel  $\mathcal{T}_0^{\text{ess}}$  est fini, et que  $\mathcal{I}_0$  est union finie de surfaces  $\mathbb{H}^2$ -admissibles.

**Remarque 4.6.1** Sous les hypothèses **(H2)-(H3)**, la réaction  $d\mu_0 := \Delta^2 U_0 - F_0$  se décompose de la façon suivante :

$$d\mu_0(X) = \tilde{\mu}_0(X) d\Lambda_2 + d\mu_{L,0}(X).$$

La densité (par rapport à la mesure de Lebesgue surfacique),  $\tilde{\mu}_0 \in L^1(\Omega)$  est la dérivée (de Radon-Nikodym) de  $\mu_0$  par rapport à  $\Lambda_2$ .

La partie singulière de la réaction est  $\mu_{L,0}$  est égale à  $\Delta^2 U_0$  sur l'ensemble essentiel  $\mathcal{T}_0^{\text{ess}} := \mathcal{T}_0 \cap \text{Supp}(\mu_0)$ . Rappelons que la partie atomique de la réaction est ici nulle.

<sup>12</sup>si nous relaxons les hypothèses de régularités cet ensemble inclut les points de contacts isolés

**Théorème 4.6.1** *Plaçons nous sous les hypothèses **(H1)**-**(H3)**, imposons  $\psi \in \mathbb{H}^4(\overline{\Omega})$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , et  $\Omega$  un domaine du plan de classe  $C^4$  (éventuellement  $C^4$  par morceaux à coins convexes).*

*Soit  $U_0$  la solution de (3.3) associée à  $F_0$ , alors nous avons l'estimation suivante de la fonction valeur optimale :*

$$Val(U_t) - Val(U_0) - tVal(L) = \frac{t^2}{2}Val(Q) + o(t^2) \quad (4.52)$$

*En outre, si  $U_t$  désigne une  $o(t^2)$ -solution, alors  $Z_t := \frac{U_t - U_0}{t} \rightarrow Z_0$  en norme et satisfait le problème  $(Q)$ , ce qui fournit le développement suivant, pour  $t \geq 0$  :*

$$U_t = U_0 + tZ_0 + o(t). \quad (4.53)$$

*Autrement dit  $Z_0(\cdot) := U'_0(\cdot, H)$  vérifie le problème aux limites suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 Z_0 = H + \theta_{Z_0, U_0} \mu_{L,0} & \text{sur } \Omega \setminus (\mathcal{I}(F_0) \setminus \mathcal{T}(F_0)) \\ Z_0 = 0 = \partial_n Z_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n Z_0 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F_0) \setminus \mathcal{T}(F_0) \\ Z_0 = 0 & \text{sur } \mathcal{I}(F_0) \setminus \mathcal{T}(F_0) \end{array} \right. \quad (4.54)$$

**Preuve :** ♦ La preuve suit exactement la trame de celle du théorème 4.5.1 à ceci près que nous devons vérifier la finitude du  $\sigma$ -terme qui apparaît dans le problème quadratique  $(Q)$  associé à (3.3), qui s'écrit pour  $t = 0$  :

$$\inf_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} ((\Delta Z)^2 - HZ) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{I}_0} \theta_{Z, U_0} d\mu \quad (4.55)$$

D'après la définition de  $\sigma$  (4.22), seuls les points de  $\partial\mathcal{I}(U_0) \cap \mathcal{I}^2(U_0, Z)$  contribuent au sigma-terme.

Sous l'hypothèse **(H3)** le compact  $\overline{\tilde{\mathcal{I}}_0}$  est une réunion finie de surfaces  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible. Grâce au Théorème 3.1.1 nous sommes assuré de l'existence d'une solution  $\tilde{U}_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  de (3.3) ayant pour zone de contact franc l'ensemble  $\overline{\tilde{\mathcal{I}}_0}$ , associée à  $\tilde{F}_0 = F_0 - \mu_{L,0} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ . Alors d'après la Remarque (4.4.6)  $\varsigma_{\tilde{U}_0, Z}(X_0) = 0$ , pour tout un ensemble de  $Z$  critique, et comme  $U_0$  et  $\tilde{U}_0$  coïncident sur un voisinage de  $\overline{\tilde{\mathcal{I}}_0}$  donc  $\varsigma_{U_0, Z}(X_0) = 0$ , pour tout un ensemble de  $Z$  critique.

Soit  $X^0$  un point d'une courbe de contact. Nous calculons le  $\theta$ -terme qui est d'après (4.22),

$$\theta(X^0) := \limsup_{\substack{X' \rightarrow X^0 \\ (U_0 - \psi)(X') > 0}} \frac{([Z(X')]_+)^2}{2(U_0(X') - \psi(X'))}$$

Considérons une fonction  $Z$  critique continuellement différentiable en  $X^0$ . Désignons par  $n$  la normale en  $X^0$  à la courbe à laquelle il appartient, et définissons un voisinage tubulaire de

$\partial\mathcal{I}_0 \cap \mathbb{B}^2(X^0, r)$ , avec  $r$  suffisamment petit, par

$$\partial\mathcal{I}_0 \cap \mathbb{B}^2(X^0, r) \times ] - \epsilon, \epsilon_0[ \ni (\chi_1, \chi_2) \mapsto \chi_1 + \chi_2 n. \quad (4.56)$$

En effectuant un développement de Taylor (dans ce voisinage tubulaire avec les coordonnées locales  $(\chi_1, \chi_2)$ ) de  $Z$  et de  $U_0 - \psi$  en  $X^0$  (grâce au Théorème 3.2.4 nous savons  $U_0$  de classe  $C^2$ ), il vient :

$$\begin{aligned} \theta(X^0) &:= \limsup_{\substack{(\chi_1, \chi_2) \rightarrow X^0 \\ (U_0 - \psi)(\chi_1, \chi_2) > 0}} \frac{([\nabla_n Z(X^0)(\chi_1, \chi_2)]^2 + o(\|(\chi_1, \chi_2) - X^0\|))}{(\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))(\chi_1, \chi_2)^2 + o(\|(\chi_1, \chi_2) - X^0\|)^2} \\ &= (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}. \end{aligned}$$

donc par densité,  $\theta(X^0) = \varsigma_{U_0, Z}(X^0) = (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}$ , qui est fini pour tout  $Z$  critique.

Nous reformulons la contrainte  $G(v) := \psi - v \leq 0$  sur  $\Omega$ , par la méthode de réduction présentée à la section 3.4.4 de [20]. L'estimation supérieure s'obtient comme pour le cas de la poutre, pour l'estimation inférieure nous donnons la marche à suivre pour le cas du contact suivant une courbe régulière  $C$ , au point nominal  $U_0$ , on a

$$g(U_0, X_s(U_0)) = 0,$$

où  $s \in [0, 1]$  est une paramétrisation du point de la courbe  $C$ . On note  $n_s$  une famille de directions normales (ou au moins non tangentes), à la courbe  $C \in \mathcal{T}_0 \cap \text{Supp}(\mu_0)$ . Sous l'hypothèse de courbure normale non nulle (4.50) :

$$g_{,XX}(0, X_s(X))(n_s, n_s) < 0 \quad (4.57)$$

la contrainte a (localement en  $X$ ) pour  $U$  voisin de  $U_0$ , sur la droite  $X_s(U_0) + \mathbb{R}n_s$  un unique point de maximum  $X_s(U_0) = X_s(U_0) + \alpha_s(U)n_s$  tel que la stationarité en  $\alpha_s(U)$  implique  $g_{,X}(U, X_s(U))n_s = 0$ , et donc

$$g_{,XU}(U, X_s(U))n_s + g_{,XX}(U, X_s(U))(n_s, n_s)\dot{\alpha}_s(U) = 0.$$

Posant  $G_{,s}(U) := g(U, X_s(U))$ , on se ramène à la contrainte

$$G_{,s}(U) = 0, \quad s \in [0, 1].$$

Il vient  $G_{,s}(U) = g_U(U, X_s(U))$ , et donc

$$G_{,ss}(U) = g_{,UU}(U, X_s(U)) + g_{,UX}(U, X_s(U))n_s\dot{\alpha}_s(U)$$

soit finalement

$$G_{,ss}(x) = g_{,XX}(U, X_s(U)) - n_s^\top g_{,UX}(U, X_s(U))^\top g_{,XX}(U, X_s(x))(n_s, n_s)^{-1} g_{,UX}(U, X_s(U))n_s.$$

Comme on s'est ramenée à la dimension 1 en minimisant on peut récrire cette expression avec  $g_{,XX}(U, X_s(U)) = 0$

$$G_{,ss}(U) = -(g_{,XU}(U, X_s(U))n_s)^2 / g_{,XX}(U, X_s(U))(n_s, n_s)$$

Exprimant le lagrangien avec la contrainte  $G_{,s} \leq 0$  on obtient la forme du problème (Q) et l'estimation inférieure voulues. ♦

**Corollaire 4.6.1** *Sous les hypothèses du théorème 4.6.1, si (H1) est relaxée en imposant*

$$(H1') : \overline{\text{int}(\text{supp}(\mu_0))} \text{ admissible}$$

*alors le développement (4.53) subsiste avec  $Z_0$  solution de (4.55) vérifie le problème aux limites suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} Z_0^{(4)} = F + \theta_{Z_0, U_0} \mu_{L,0} & \text{sur } \Omega \setminus \left( \text{supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}_0^{ess} \right) \\ Z_0 = 0 = \partial_\nu Z_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_\nu Z_0 = 0 & \text{sur } \partial \text{supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}_0^{ess} \\ Z_0 = 0 & \text{sur } \text{supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}_0^{ess} \end{array} \right. \quad (4.58)$$

**Exemple 4.6.1** Reprennons l'Exemple 3.6.1 et donnons l'expression de la dérivée directionnelle  $Z_{t'}(.) := U'_{t'}(., H)$  de  $U_{t'}$  dans la direction  $H$ , avec  $F_t := t' + tH$ , quand  $t \rightarrow 0$ . Nous avons polyédricité quand  $t' \geq 128$  puisque la zone de contact est un disque (voir figure (4.9) et que le contact est franc donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 Z_{t'} = H & \text{sur } \Omega \setminus \bar{\mathbb{B}}^2(0, R_{t'}) \\ Z_{t'} = 0 = \partial_n Z_{t'} & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n Z_{t'} = 0 & \text{sur } \mathbb{S}^1(0, R_{t'}) \\ Z_{t'} = 0 & \text{sur } \mathbb{B}^2(0, R_{t'}) \end{array} \right.$$

Par contre quand  $64 < t' < 128$  (voir figure (4.9) il n'y a pas polyédricité. Comme il n'y a pas raccord des courbures entre la plaque et l'obstacle nous pouvons utiliser le Théorème 4.6.1 pour obtenir la dérivée directionnelle dans la direction  $H$  sous la forme (avec  $r := \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 Z_{t'} = H + \theta_{Z_{t'}, U_{t'}}(R_{t'}) \left( \Delta^2 U_{t'}(r) - t' \right) & \text{sur } \Omega \setminus \bar{\mathbb{S}}^1(0, R_{t'}) \\ Z_{t'} = 0 = \partial_n Z_{t'} & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n Z_{t'} = 0 & \text{sur } \mathbb{S}^1(0, R_{t'}) \\ Z_{t'} = 0 & \text{sur } \mathbb{S}^1(0, R_{t'}) \end{array} \right.$$

Avec  $\Delta^2 U_{t'} = \left( \partial_r^4 + \frac{2}{r} \partial_r^3 - \frac{1}{r^2} \partial_r^2 + \frac{1}{r^3} \partial_r \right) (U_{t'})$ ,  $\partial_r^4 U_{t'} = [\partial_r^3 U_{t'}(R_{t'})] \delta_{r=R_{t'}}$  et

$$\theta_{Z_{t'}, U_{t'}}(R_{t'}) = \frac{(\partial_r Z_{t'}(R_{t'}))^2}{\partial_r^2 (U_{t'} - \psi)(R_{t'})}.$$

**Commentaires 4.6.1** Nous ne savons encore pas nous affranchir des hypothèses sur la structure topologique (nombre fini de composantes connexes) et la géométrie (régularité des parties parfaites de  $\mathcal{I}_0$ ) de la zone de contact, pour obtenir la dérivée directionnelle de  $U$  par rapport à  $F$ . Une nouvelle fois ces préoccupations semblent reliées à la conjecture que nous avons formulé à la Remarque 3.4.3 du Chapitre 3 quant à la non-dégénérescence de la frontière libre. En particulier le cas d'un point ou d'une courbe de contact avec raccord des courbures entre  $U$  et  $\psi$  conduit à un phénomène d'instabilité géométrique (c.f. Exemples 4.2.1 et 4.2.2) et nous ne savons pas conclure de la dérivabilité de  $U$  par rapport à  $F$ , la

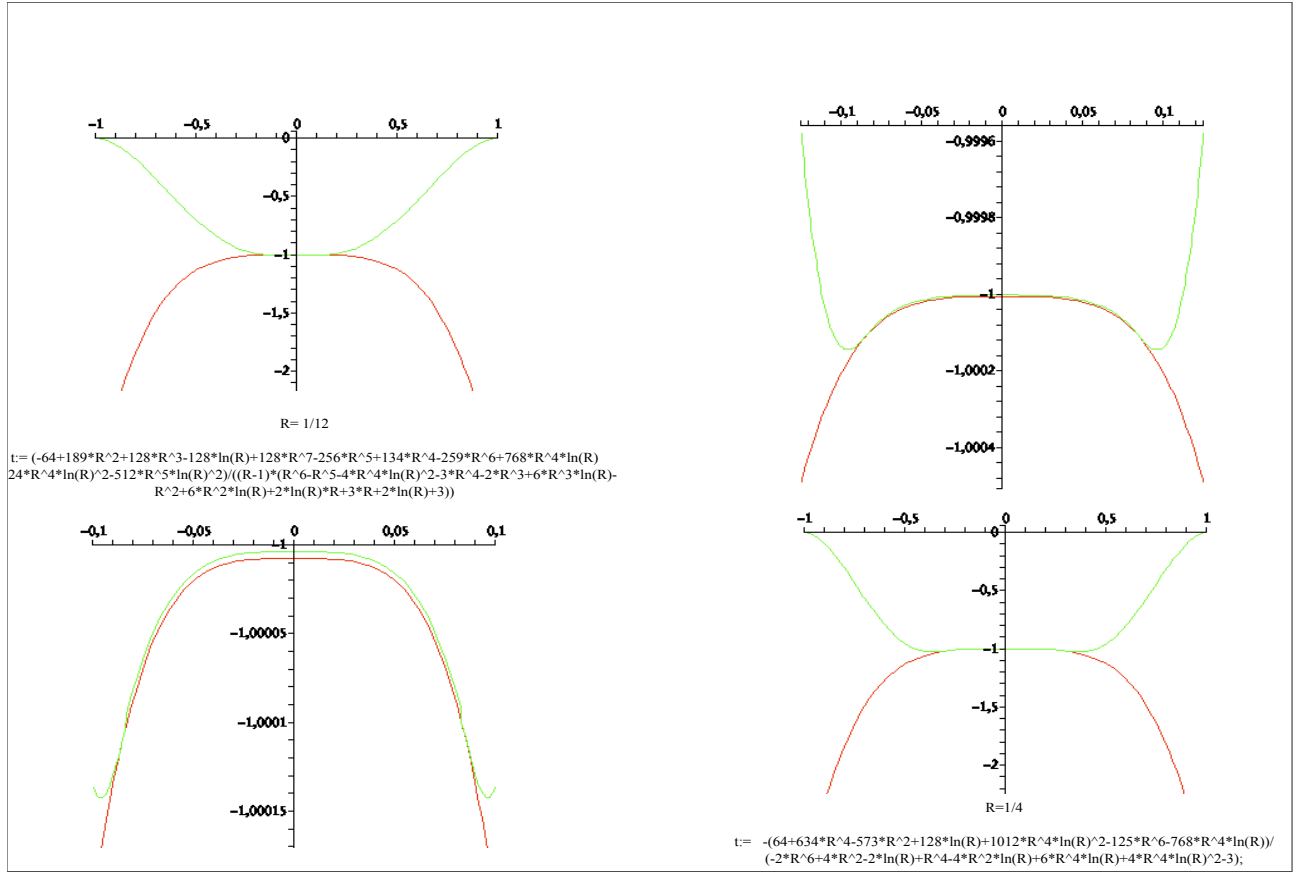


FIG. 4.9 – Déflexion sous chargement constant d’une plaque circulaire encastree : pour  $t = 123,578$  la zone de contact est un cercle de centre 0 et de rayon  $R = 1/12$ , et pour  $t = 364,9$  la zone de contact est un disque de centre 0 et de rayon  $R = 1/4$ .

question est aussi ouverte pour un nombre infini de courbes de contact.

Pour finir, nous pouvons signaler comme application numérique possible des précédents résultats l’article de F. BONNANS & A. HERMANT [23] dans lequel ils développent des *méthodes de tir par homotopie* permettant de calculer avec précision la solution d’une équation différentielle ordinaire soumise à une contrainte sur l’état (sous une hypothèse de qualification), dont la structure topologique de la zone de contact est supposée vérifier les hypothèses (H1) - (H3). L’idée étant d’introduire les points (en nombre fini) de la frontières libre  $\partial\mathcal{I}$  comme paramètres de la fonction de tir, et d’utiliser une méthode d’homotopie pour une certaine pénalisation de la contrainte (grâce aux résultat de dérivabilité [22]). Ils donnent une condition nécessaire et suffisante pour que cet algorithme soit bien posé (c’est-à-dire que le Jacobien de la fonction de tir soit inversible), sa nouveauté est de déterminer automatiquement la structure de la trajectoire et d’initialiser les paramètres de tir associés. Cette approche pourrait faire l’objet d’une adaptation au cas de la poutre et d’une extension au cas de la plaque linéaire élastique.

---



## Chapitre 5

# LE PROBLEME D'OBSTACLE POUR UNE PLAQUE DE VON KARMAN : PERSPECTIVES

"If people do not believe that mathematics are simple, it is only because they do not realize how complicated the life is." John. B. Von Neumann.

Après s'être intéressé au cas des petites déformations, nous allons à présent prendre en compte les termes non-linéaires de variations de métriques selon le *Modèle de Von Karman*. Ici à la différence des chapitres précédents nous allons seulement rappeler l'état des lieux en vue d'introduire les sujets de travaux ultérieurs. Nous expliquons, aux travers d'un résumé des connaissances acquises sur le sujet, pourquoi l'exploration des branches de bifurcations des plaques en grandes déformations se complique grandement dans le cas unilatéral par rapport à la situation sans obstacle. La première formulation variationnelle du problème statique de la flexion forte des plaques de Von Karman en présence d'obstacle a été donnée par G. DUVAUT & J.-L. LIONS [54] en 1974. Ils ont prouvé l'existence d'une solution par des techniques de régularisation de graphes maximaux monotones. A leur suite, C. DO [50] et A. CIMETIÈRE [38] ont donné certaines propriétés globales et locales des points de bifurcations pour un problème de flambage unilatéral d'une plaque de Von Karman. Dans les années 1990, par des techniques topologiques de points fixes s'appuyant sur le degré de Leray-Schauder, D. GOELEVEN, V.H. NGUYEN, M. THERA [72], puis V.K. LE & K. SCHMITT [86] ont donné des théorèmes qui étendent au cas des inéquations les résultats classiques de bifurcations globales. Ils n'ont cependant pas traité le problème de la continuation, car leur approche concerne les propriétés qualitatives du diagramme de bifurcation mais pas sa construction explicite. Poursuivant l'exploration de stabilité de la solution en fonction de la géométrie de la zone de contact, nous commentons les résultats de J. EISNER, M. KUCERA, L. RECKE [110] pour une poutre en grandes déformations, dans l'optique d'une extension du théorème de stabilité 3.6.1. Enfin nous terminons ce Chapitre par quelques perspectives concernant l'étude du diagramme de bifurcations des plaques de Von Karman en présence d'obstacle, incluant les questions de régularité, stabilité, sensibilité.

## 5.1 Formulation variationnelle du problème de contact

Considérons une plaque de Von Karman placée au dessus d'un obstacle rigide  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ , soumise à un champ de forces transversales  $F \in L^2(\Omega)$ , et latérales  $L_\alpha \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . La plaque est encastree sur une partie  $\Gamma_e \neq \emptyset$ , et en appui simple sur  $\Gamma_s$ , avec  $\partial\Omega = \Gamma_e \amalg \Gamma_s$ .

Nous supposons que le contact s'effectue *sans frottement*.

Nous utilisons les notations introduites au Chapitre I, en particulier la définition des opérateurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{C}$ .

L'équilibre global d'une telle plaque s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{K}_\psi \text{ vérifiant :} \\ \langle U - \lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}, W - U \rangle \geq 0, \quad \forall W \in \mathbb{K}_\psi. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Rappelons que le cône des déplacements cinématiquement admissibles est

$$\mathbb{K}_\psi := \{V \in \mathbb{H} / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

Remarquons que pour tout  $F \in L^2(\Omega)$ , il existe  $\check{F} \in \mathbb{H}$  tel que

$$\int_{\Omega} \check{F} V d\Omega = \langle F, V \rangle, \quad \forall V \in \mathbb{H}. \quad (5.2)$$

L'inéquation variationnelle (5.1) peut être réécrite en utilisant l'incatrice convexe, comme la recherche de  $U \in \mathbb{K}_\psi$  vérifiant :

$$\langle U - \lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}, W - U \rangle + \mathbb{I}_{\mathbb{K}_\psi}(W) - \mathbb{I}_{\mathbb{K}_\psi}(U) \geq 0, \quad \forall W \in \mathbb{H}.$$

Sous cette forme, il est alors facile d'appliquer les résultats de S. ADLY, D. GOELEN, M. THERA [5] relatifs aux opérateurs pseudo-monotones bornés et l'analyse de récession. Notons que le classique Théorème de Lions-Stampacchia pour des opérateurs monotones, continus et coercifs tombe en défaut pour (5.1). Cela est dû à la présence du terme  $(Id - \lambda \mathbf{L})$  qui engendre une perte de coercivité au delà d'une certaine valeur du paramètre  $\lambda$ . En particulier nous avons :

**Théorème 5.1.1** *Soit  $\Omega$  un domaine borné du plan, avec  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\overline{\Omega})$  et  $\psi \leq 0$  sur  $\Omega$ , alors le problème (5.1) admet au moins une solution pour toute valeur de  $\lambda$ .*

**Remarque 5.1.1** Une autre formulation équivalente de (5.1) peut être donnée en terme de point fixe grâce à l'opérateur de projection  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}_\psi}$  sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \end{array} \right. \quad (5.3)$$

avec  $\mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}$ . Ce qui justifie l'intérêt que nous portons aux propriétés de différentiabilité de l'opérateur  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}_\psi}$  par rapport au paramètre  $\lambda$ .

---

## 5.2 Flambage en théorie unilatérale des plaques de Von Karman

L'analyse du flambage des plaques élastiques minces encastrée sur  $\Gamma_e$  et en appui simple sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma_e$ , soumises à des conditions unilatérales sur le déplacement vertical, conduit à l'étude de problèmes aux valeurs propres pour des inéquations variationnelles linéarisées.

L'inéquation variationnelle linéarisée homogène associée à (5.1) (selon la terminologie de l'Annexe F) s'écrit :

$$\text{Trouver } U \in \mathbb{K}_\psi \text{ tel que : } \langle U - \lambda \mathbf{L}(U), V - U \rangle \geq 0, \quad \forall V \in \mathbb{K}_\psi. \quad (5.4)$$

**Commentaires 5.2.1** (*cas bilatéral*) Rappelons que dans le cas du flambement bilatéral, on a  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , et la charge critique est la plus petite valeur propre  $\lambda_1$  de la partie linéaire de l'opérateur de Von Karman. Par exemple pour  $F = 0$ , la solution nulle est un point d'équilibre stable pour le problème de Von Karman, pour tout  $\lambda < \lambda_1$ . Si la compression  $\lambda$  varie de façon quasistatique, les termes d'inertie peuvent être négligés et le flambage est supposé se faire suivant une branche non triviale de solutions bifurquant à partir de la branche triviale au point  $\lambda_1$ . Quand la compression latérale augmente au delà de  $\lambda_1$ , la solution perd sa stabilité et la plaque flambe vers un autre état stable,  $\lambda_1$  est appelée charge de flambage ou critique. Le mode de flambage est la fonction propre associée à valeur propre  $\lambda_1$  de la partie linéaire de l'opérateur de Von Karman. Les analyses de la stabilité des branches pour  $\lambda > \lambda_1$  ont fait apparaître des phénomènes de transitions brusques entre deux modes que M. Golubitsky et D. G. Schaeffer ont baptisé « mode jumping ».

### 5.2.1 Résultats de bifurcations locales

G. DUVAUT & J.-L. LIONS [54] ont établi une formulation du type (5.1) avec  $\mathbf{L} = 0$  et  $\psi = 0$  pour modéliser la flexion forte des plaques encastrées soumises à des conditions unilatérales. L'existence de solutions pour le cadre fonctionnel décrit ci-dessus est établie par les techniques de régularisation des opérateurs maximaux monotones. Ils ont montré l'existence d'une solution unique si les charges exercées sur la plaque sont de la forme  $F = tF^0$  pour les petites valeurs de  $t$ .

**Remarque 5.2.1** Ils signalent que les questions de bifurcations (probables) de  $U_t$  quand  $t$  croît sont ouvertes.

C. Do et A. Cimetière ont étudié le flambage d'une plaque élastique mince *reposant sans frottement sur un support rigide plan* (obstacle plan) soumises à un chargement latéral  $\lambda(L_\alpha)$  et transversal  $F$ , sous l'hypothèse que  $F$  appuie la plaque sur son support<sup>1</sup> (i.e.  $F \leq 0$ , sur  $\Omega$ ). La plaque est encastrée sur son bord  $\Gamma_e$  et en appui simple ailleurs. Ils ont examiné l'existence de branches de bifurcation continues autour de points critiques  $(\lambda, U)$ . C. Do [50], [51], [52] a prouvé que le problème (avec  $\mathbf{L} \neq 0$  et  $\psi = 0$ ) admet une unique solution quand  $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$  ( $\lambda_0 > 0$ ), mais il ne caractérise pas ce  $\lambda_0$ . En outre si  $F < 0$  sur  $\Omega$ , alors il n'y a pas bifurcation autour de la solution nulle pour  $\lambda$  fini. Plus précisément :

---

<sup>1</sup>Avec la notation (5.2) :  $(F \leq 0, \text{ pp sur } \Omega)$  est équivalent à  $(\langle \tilde{F}, V \rangle \leq 0 \text{ pour tout } V \in \mathbb{K}_0)$ .

**Théorème 5.2.1** Posons  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi = 0$  et  $\mathbb{K}_0 = \{V \in \mathbb{H}_0^2 / V \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ , dans (5.1), avec les opérateurs (1.22) et (1.24). Nous nous plaçons sous l'hypothèse  $F \leq 0$ , sur  $\Omega$ .

► Soit  $\lambda_c^+$  (resp.  $\lambda_c^-$ ) la plus petite valeur propre classique  $> 0$  (resp. la plus grande valeur propre classique  $< 0$ ) de  $\mathbf{L}$  alors si  $\lambda \in ]\lambda_c^-, \lambda_c^+[$ ,  $U = 0$  est l'unique solution du problème dans (5.1).

► Il existe une famille de solutions non-triviales de (5.1), notées  $(\lambda_r, U_r)_{r>0}$  telles que

$$\langle \mathbf{L}(U_r), U_r \rangle_{\mathbb{H}_0^2} = \sup_{V \in \partial \mathcal{A}_r} \langle \mathbf{L}(V), V \rangle_{\mathbb{H}_0^2} \text{ avec } \mathcal{A}_r := \{V \in \mathbb{K}_0 / \frac{1}{2} \|V\|_{\mathbb{H}_0^2}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{C}(V) - \langle \check{F}, V \rangle = r\}.$$

De plus  $\lim_{r \rightarrow 0} \|U_r\|_{\mathbb{H}_0^2} = 0$ , et  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|U_r\|_{\mathbb{H}_0^2} = +\infty$ .

► Avec la notation (5.2), supposons que  $\langle \check{F}, V \rangle_{\mathbb{H}_0^2} < 0 \implies V \neq 0$ . Alors  $\lambda = +\infty$  est le seul point de bifurcation autour de la solution triviale.

►  $\lambda = +\infty$  est également le seul point de bifurcation autour de la solution triviale si nous faisons l'hypothèse :

$$\langle \mathbf{C}(V), V \rangle_{\mathbb{H}_0^2} > 0, \implies V \neq 0. \quad (5.5)$$

**Commentaires 5.2.2** L'hypothèse (5.5) signifie que la plaque ne peut fléchir sans extension. Cette condition est satisfaite si nous supposons que la plaque est encastree, ou bien lorsque la plaque est en appui simple et  $\partial\Omega$  sans point d'inflexion [102]. Le précédent théorème établit l'existence de charges critiques sans en donner de caractérisation. En effet, dans le cas du flambage bilatéral classique, les charges critiques apparaissent comme valeurs propres d'un opérateur linéaire. Le résultat suivant d' A. CIMETIÈRE [37] pallie cette lacune en assurant que dans le cas unilatéral elles sont données par un quotient de Rayleigh sur le cône  $\mathbb{K}_0$ .

**Théorème 5.2.2** *Posons  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi = 0$  et  $\mathbb{k}_0 = \{v \in \mathbb{H} / v \geq 0\}$ , dans (5.1). L'inéquation linéarisée homogène (5.4) possède une plus petite valeur propre généralisée positive  $\lambda_1$  (resp. une plus grande valeur propre généralisée négative  $\lambda'_1$ ). Soit  $Z_1$  (resp.  $Z'_1$ ) un vecteur propre correspondant cette valeur propre  $\lambda_1$ .*

► *Alors, pour  $F = 0$ , l'inéquation (5.1) admet une solution non nulle si et seulement si  $\lambda \notin [\lambda'_1, \lambda_1]$ , avec :*

$$\frac{\langle \mathbf{L}(Z_1), Z_1 \rangle}{\|Z_1\|^2} = \frac{1}{\lambda_1} = \sup_{V \in \mathbb{k}_0} \frac{\langle \mathbf{L}(V), V \rangle}{\|V\|^2}; \quad \frac{\langle \mathbf{L}(Z'_1), Z'_1 \rangle}{\|Z'_1\|^2} = \frac{1}{\lambda'_1} = \inf_{v \in \mathbb{k}} \frac{\langle \mathbf{L}(V), V \rangle}{\|V\|^2}$$

►  *$\lambda'_1$  est la charge critique négative, et  $\lambda_1$  est la charge critique positive.*

► *Pour  $F \neq 0$  si  $0 \leq \lambda \leq l_1 := 1/\left(\sup_{V \in \mathbb{k}_0} \frac{\langle \mathbf{L}(V), V \rangle}{\|V\|^2 + \kappa[\mathbf{C}(V)\langle \check{F}, V \rangle^2]^{1/3}}\right)$ , avec  $\kappa = \frac{(3\sqrt[3]{2})}{2}$ , alors  $U = 0$  est la seule solution de (5.1); et si  $\lambda > \tilde{l}_1 := 1/\left(\sup_{V \in \mathbb{k}_0} \frac{\langle \mathbf{L}(V), V \rangle}{\|v\|^2 + \sqrt[3]{2}\kappa[\mathbf{C}(V)\langle \check{F}, V \rangle^2]^{1/3}}\right)$  alors (5.1) possède une solution non nulle.*

**Commentaires 5.2.3** La preuve du précédent théorème repose sur la méthode de Galerkin, qui conduit à résoudre l'inéquation (5.1) sur une suite de convexes fermés de sommet l'origine,  $\mathbb{k}_\psi(n) \subset \mathbb{k}_\psi$ , de dimension fini et tels que  $\mathbb{k}_\psi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{k}_\psi$ .

Bien que nous connaissions l'expression des charges critiques, nous ne savons pas encore décrire la bifurcation au point  $(\lambda_1, 0)$ . Ceci a été fait par A. CIMETIÈRE [38] par une méthode constructive adaptant la Méthode de Lyapounov-Schmidt à l'inéquation (5.1) valable pour la première valeur propre généralisée, avec un obstacle  $\psi$  plan et  $F = 0$ . Le résultat suivant est le premier du genre, caractérisant localement la branche au voisinage de la charge critique  $\lambda_1$  sous les deux hypothèses suivantes dont la validité est acquise dans un certain nombre de situations classiques [15] :

- $(H_1)$  : L'espace propre de  $\mathbf{L}$  associé à  $\lambda_1^b$  la première valeur propre positive de  $\mathbf{L}$  est de dimension 1.
- $(H_2)$  : Notons  $\lambda_2^b$  la deuxième valeur propre positive de  $\mathbf{L}$ , alors  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1^b} - 1 < \frac{\lambda_2^b - \lambda_1^b}{\lambda_2^b + \lambda_1^b}$ .

Enonçons le Lemme suivant qui définit en particulier des notations utiles à l'énoncé du Théorème qui lui fait suite.

**Lemme 5.2.1** *Soit  $Z_1$  un vecteur propre de (5.4) associé à la valeur propre  $\lambda_1$ . Alors  $\lambda_1 < \lambda_2$  avec :*

$$\frac{1}{\lambda_2} = \sup_{V \in Z_1^\perp} \frac{\langle \mathbf{L}(V), V \rangle}{\|V\|^2}.$$

*De plus nous avons la propriété suivante de séparation de deux directions propres  $Z_1$  et  $Z'_1$  associée à la valeur propre  $\lambda_1$  :*

$$Z'_1 \in \mathbb{k}_0^+(Z_1) := \{V \in \mathbb{k}_0 / \langle Z, Z_1 \rangle > 0\} \implies Z'_1 \in \mathbb{R}^+(Z_1).$$

**Théorème 5.2.3** [38] Avec les notations et hypothèses du Théorème (5.2.2), avec  $F = 0$ ,  $(H_1)$  et  $(H_2)$  nous avons

► pour  $\lambda \in [0, \lambda_1[$ , l'inéquation (5.1) ne possède que la solution nulle.

► pour  $Z_1$  un vecteur propre de l'inéquation linéarisée homogène (5.4), associé à  $\lambda_1$ , au voisinage du point  $(\lambda, U) = (\lambda_1, 0)$  l'inéquation (5.1) possède, dans  $\mathbb{K}_0^+(Z_1)$  une et une seule branche de bifurcation. Pour cette branche il existe une représentation paramétrique

$$\{(\lambda(\alpha), U(\alpha)) / \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\}$$

telle que :

$$\lambda(\alpha) = \lambda_1 + \lambda_1 \langle \mathbf{C}(Z_1, Z_1) \rangle \alpha^2 + \alpha^3 O(\alpha); \quad (5.6)$$

$$U(\alpha) = \alpha Z_1 + \alpha^2 O(\alpha) \text{ avec } O(\alpha) \in \{Z_1\}^\perp; \quad (5.7)$$

$$\text{Les applications } \alpha \mapsto \lambda(\alpha), \text{ \& } \alpha \mapsto U(\alpha) \text{ sont lipschitziennes sur } [0, \bar{\alpha}]; \quad (5.8)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U(\alpha)}{\|U(\alpha)\|} = Z_1; \quad (5.9)$$

► Suivant la valeur de  $\langle \mathbf{C}(Z_1, Z_1) \rangle$ , nous disposons des précisions complémentaires suivantes :

(i) Si  $\langle \mathbf{C}(Z_1, Z_1) \rangle > 0$ , l'application  $\alpha \mapsto U(\alpha)$  est strictement croissante sur un intervalle  $[0, \bar{\alpha}']$ ,  $\bar{\alpha}' \leq \bar{\alpha}$ , alors la branche de solutions peut-être paramétrée par  $\lambda$  et on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} U(\lambda) = 0;$$

(ii) Si  $\langle \mathbf{C}(Z_1, Z_1) \rangle = 0$ , la branche de bifurcation située dans  $\mathbb{K}_0^+(Z_1)$ , est « verticale », i. e.  $(\alpha Z_1, \lambda_1)$  vérifie (5.1) pour tout  $\alpha \geq 0$ .

**Remarque 5.2.2** De plus, grâce à ces résultats l'auteur montre que tout vecteur sur cette branche peut être caractérisé comme solution d'une équation et d'une inéquation fonctionnelles posée dans un cône contenu dans  $\{Z_1\}^\perp$ . Par contre, encore aujourd'hui nous ne savons pas en général conclure sur la différentiabilité de  $U$  par rapport à  $\lambda$ .

## 5.2.2 Résultats de bifurcations globales

Si nous posons  $F = 0 = \psi$  dans (5.1), nous constatons alors que pour tout  $\lambda$ ,  $U = 0$  en est solution triviale. Les résultats de bifurcations globales, issus de la théorie du degré topologique de Leray-Schauder (Théorème F.4.1), renseignent sur le comportement qualitatif des branches de solutions du problème (5.1), sans pour autant permettre un traitement numérique.

En conséquence du Théorème F.4.2, nous pouvons énoncer le corollaire suivant qui condense les résultats du livre de V.K. LE & K. SCHMITT [86].

**Corollaire 5.2.1** Dans (5.1) Posons  $F = 0 = \psi$  et  $\mathbb{K}_0 = \{v \in \mathbb{H} / v \geq 0 \text{ sur } \overline{\Omega}\}$ . Alors (5.4) admet au plus un ensemble dénombrable de points de bifurcation  $(0, \lambda)$ , avec pour seul point d'accumulation  $+\infty$ . En outre si la plaque est encastrée sur tout son bord, elle ne flambe pas. Si elle est simplement appuyée sur une partie de mesure de Lebesgue non-nulle alors :

- (i) Si  $(0, \lambda_0)$  est un point de bifurcation de (5.1), alors  $\lambda_0$  est une valeur propre de (5.4).
- (ii) Si  $\lambda$  est une valeur propre de (5.4) de multiplicité impaire, alors  $(0, \lambda)$  est un point de bifurcation de (5.1) vérifiant l'alternative du Théorème F.4.2 :

►  $\mathcal{C}$  est non-bornée dans  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ ,

ou bien

►  $(0, \lambda_1) \in \mathcal{C} \cap (\{0\} \times \mathbb{R} \setminus [a, b]) \neq \emptyset$ , pour  $\lambda_1 \notin [a, b]$  valeur propre de (5.4) ;

si  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) ne sont pas des valeurs propres de (5.4) et pour  $\mathcal{C}$  composante connexe de  $\mathcal{S}$  contenant  $\{0\} \times [a, b]$ , avec

$$\mathcal{S} := \overline{\{(U, \lambda) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} / (u, \lambda) \text{ solution de (5.1) avec } u \neq 0\}} \cup (\{0\} \times [a, b]).$$

Nous retiendrons que ce Corollaire, comme l'alternative de Rabinowitz, fait apparaître la bifurcation comme un phénomène global. Cependant si nous souhaitons obtenir des informations plus précises (comme le nombre de solutions pour une valeur fixée du paramètre  $\lambda$ ), il faut mettre en place une étude locale en adaptant, par exemple, la méthode de Lyapunov-Schmidt, et trouver les moyens d'un traitement numérique *ad hoc*. A ce propos nous savons que tant que la solution considérée évolue sur une branche d'équation, elle peut être calculée aux points réguliers grâce au Théorème d'inversion locale, et H. Keller a expliqué comment traiter le cas de points singuliers. Pour faire de même pour le problème simplifié modèle de la membrane en grandes déformations (9) on peut imaginer calculer la branche de solutions unilatérales à partir du point de transition. Pour cela il faut impérativement connaître «  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$  », idéalement en tout point régulier et savoir « sauter » les points singuliers en adaptant les techniques de bifurcations d'équations.

Inspirés de la méthode de Keller [80] pour la résolution du problème de bifurcation sans contrainte, les auteurs de [46] définissent un *problème augmenté* associé à (9) dans  $\mathbb{H}^1$  et prouvent que les points réguliers et singuliers simples de (9) deviennent réguliers pour un problème augmenté. Pour le cas du problème (5.1) il se peut que la dérivée directionnelle n'existe pas en certains points réguliers en fonction de la nature de la zone de contact, ce qui rend encore plus délicate l'écriture d'une méthode de continuation.

### 5.2.3 Régularité des solutions

Considérons le problème (5.1) pour une plaque encastrée. Nous nous inspirons de la preuve de la régularité des solutions de (1.14) détaillée dans [93].

**Théorème 5.2.4** Soit  $\Omega$  un domaine borné du plan, avec  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  et  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors toute solution de (5.1) pour une plaque encastrée, vérifie :

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty} \cap \mathbb{H}_{loc}^3 \cap C^2(\Omega).$$

**Preuve :** ♦ L'astuce consiste à utiliser le Théorème 3.2.4 de B. Schild assurant que la solution de (3.2) est  $\mathbb{H}_{loc}^{2,\infty} \cap \mathbb{H}_{loc}^3 \cap C^2(\Omega)$ , dès que le champ de forces est  $L^p(\Omega)$  avec  $p > 1$ . D'après le Théorème (5.1.1) une solution  $(U, \chi) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}^4(\Omega)$  de (5.1) pour le cas  $\Gamma_s = \emptyset$ , et  $\Gamma_e = \partial\Omega$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$[U; U] \in L^1(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega),$$

donc grâce à [91]

$$\chi \in \mathbb{H}^{3-\varepsilon}(\Omega).$$

Or

$$\partial_{\alpha\beta}\chi \in \mathbb{H}^{1-\varepsilon}(\Omega) \subset L^{2/\varepsilon}(\Omega),$$

donc

$$[U; \chi] \in L^q(\Omega), \text{ avec } 1 \leq q < 2.$$

Or d'après la définition (1.13),  $\Theta \in \mathbb{H}^3(\Omega)$ , alors

$$[U; \chi] + \lambda[\Theta; U] + F \in L^q(\Omega),$$

ce qui suffit pour conclure. ♦

**Remarque 5.2.3** Ce résultat peut-être affiné en s'affranchissant du « loc » si nous supposons plus de régularité sur  $\partial\Omega$  comme dans le Chapitre 3.

**Remarque 5.2.4** Considérons une plaque circulaire chargée par une force constante partout dirigée vers un obstacle  $\psi = -1$ . Alors sous ces conditions, une solution axisymétrique de (5.1) ayant pour zone de contact un disque, présente des efforts tranchants strictement positifs tout au long de la frontière de la zone de contact, ce qui interdit à  $U$  d'appartenir à  $\mathbb{H}^4(\Omega)$ !

### 5.3 Stabilité géométrique pour une poutre en grandes déformations - Application aux bifurcations

Considérons le flambage d'une poutre élastique, occupant au repos le segment  $[-1, 1]$ , simplement appuyée en  $-1$  et  $1$ , comprimée par une force appliquée à ses extrémités dont l'intensité est mesurée par le paramètre  $\lambda$ , alors qu'elle est placée au dessus d'un obstacle rigide plan  $\psi \geq 0$ . Si le contact a lieu sans frottement, l'équilibre d'une telle poutre s'écrit<sup>2</sup>

Trouver  $u \in \mathbb{K}_0 := \{v \in \mathbb{H}^2(-1, 1) \cap \mathbb{H}_0^1(-1, 1) / v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$  tel que :

$$\int_{-1}^1 u''(v - u)''(x) - \lambda u'(v - u)'(x) dx \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{K}_0. \quad (5.10)$$

<sup>2</sup>Le lecteur pourra consulter [26] pour l'établissement équations d'équilibres bilatérales du flambage d'une poutre élastique. A ce propos signalons que l'équation d'équilibre (bilatérale) du déplacement vertical  $u$  d'une poutre élastique simplement appuyée en  $-1$  et  $1$ , comprimées par une force appliquée ses extrémités dont l'intensité est mesurée par le paramètre  $\lambda$ , s'écrit :

$$\left( \frac{u''}{1 - (u')^2} \right)'' - \lambda \left( \frac{u'}{\sqrt{1 - (u')^2}} \right)' + \frac{(u'')^2 u'}{1 - (u')^2} = 0.$$



Le but poursuivi par J. EISNER, M. KUCERA, L. RECKE dans [110] est de fournir un théorème des fonctions implicites pour (5.10). Le résultat obtenu peut être énoncé comme suit :

**Théorème 5.3.1** *Soit  $(\lambda_0, u_0)$  une solution (5.10) ayant pour zone de contact  $\mathcal{I}_0 := [\alpha_0, \beta_0]$ , avec  $-1 < \alpha_0 < \beta_0 < 1$ . Alors l'ensemble de toutes les solutions  $(\lambda, u)$  de (5.10) proches de  $(\lambda_0, u_0)$  peut être paramétré par  $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ , où  $\bar{u}$  est de classe  $C^1$  sur un voisinage de  $\lambda_0$  dans  $\mathbb{R}$ , et à valeurs dans  $\mathbb{H}^2(-1, 1) \cap \mathbb{H}_0^1(-1, 1)$ . En particulier la zone de contact de la solution  $\bar{u}(\lambda)$  s'écrit  $[\bar{\alpha}(\lambda), \bar{\beta}(\lambda)]$  avec  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  de classe  $C^1$ .*

### Commentaires 5.3.1

- Il s'agit, dans le contexte des grandes déformations, d'une généralisation du Théorème de dérivabilité de la frontière libre d'A. CIMETIÈRE & A. LÉGER [39], bien qu'il faille signaler qu'en général (contrairement au cas linéaire)  $\lambda \mapsto \bar{u}(\lambda)$  n'est pas  $C^2$ .
- La preuve est basée sur l'idée suivante. Sous l'hypothèse que la zone de contact soit un vrai-intervalle et sous une hypothèse de non-dégénérescence portant sur le paramètre  $\lambda$ , l'ensemble de toutes les solutions  $(\lambda, u)$  de (5.10) proche de  $(\lambda_0, u_0)$  est  $C^1$ -difféomorphe à l'ensemble de toutes les solutions d'une équation implicite faisant intervenir un opérateur régulier de classe  $C^1$ , auquel il est alors possible d'appliquer le théorème des fonctions implicites classique.
- Notons que la procédure de transformation de l'inéquation variationnelle (5.10) en une équation faisant intervenir un opérateur régulier, sous réserve d'hypothèses géométriques sur la zone de contact et sur les charges appliquées, peut donner lieu à d'autres résultats locaux de différentiabilité (et servir comme outil pour écrire une méthode de Newton, ou une méthode de Lyapunov-Schmidt) pour (5.10).
- Les auteurs ont obtenu plus récemment, pour ce problème, l'existence d'une famille de solutions  $\lambda$ -régulières non-triviales qui bifurque de la solution triviale, si la zone de contact est une union finie de vrai-intervalles [111].
- Nous pouvons encore une fois noter le rôle important joué par la géométrie de la zone de contact dans l'établissement de résultats de stabilité ou de régularité d'une solution d'un problème d'obstacle posé dans  $\mathbb{H}^2$ .
- En outre, la méthode de preuve proposée par les auteurs pour des opérateurs quasilineaires d'ordre 4 en dimension 1 peut très vraisemblablement se transposer en dimension 2 au cas de l'inéquation variationnelle des plaques de Von Karman (5.1), avec  $F = 0$  et  $\psi = 0$ .

---

## 5.4 Perspectives

Les principales perspectives de recherches qui apparaissent à l'issue de cette thèse concernent l'énoncé de théorèmes de stabilité géométrique et de sensibilité pour le problème de l'obstacle des plaques de Von Karman (5.1).

1. La possibilité de transposer la méthode de preuve du Théorème de Stabilité 3.6.1 en perturbant la zone de contact d'une solution de (5.1) repose principalement sur la nécessité d'obtenir des estimations de Schauder non plus seulement pour le bilaplacien-Beltrami, mais aussi pour des opérateurs quasilineaires d'ordre 4 dont les coefficients proviennent d'une certaine métrique riemannienne. L'autre point délicat sera de s'assurer que la solution perturbée obtenue après application du Théorème de Nash-Moser satisfait bien les équations d'équilibre. Ceci semble être vérifié sous l'hypothèse de non-dégénérescence du cas linéaire (3.27) avec un obstacle  $\psi$  plat. Un des arguments est que les termes faisant intervenir le crochet de Monge-Ampère s'annulent automatiquement sur le bord d'une zone de contact si elle est une surface lisse.
2. La géométrie de la zone de contact de (3.2) est largement méconnue, et beaucoup de questions restent encore en suspens comme l'énoncé de résultats géométriques de stabilité locale dans l'esprit des Théorèmes 2.7.3 et 2.7.4 formulés par L. Caffarelli ; ou l'extension du Théorème 2.6.1 de Monneau pour (3.2) - également pour le problème de l'obstacle associé à l'opérateur de Monge-Ampère.
3. Nous pouvons envisager de compléter l'étude de sensibilité du Chapitre 4, pour les branches de solutions de (5.1) avec  $F = 0 = \psi$ . En effet d'après le résultat de bifurcation globale du Corollaire 5.2.1 nous savons que les points réguliers forment des branches dont il est intéressant d'étudier la différentiabilité. Ceci fournira un outil important pour la conception de méthode de continuation par « prédiction-correction ».
4. Un autre développement porterait sur l'exploration des directions de bifurcation de (5.1) et les liens entre leur sensibilité et stabilité au sens des systèmes dynamiques (par exemple de Lyapounov), et la compréhension du phénomène « claquage » (appelé aussi « mode jumping ») dans le cas unilatéral.
5. Ceci fait, l'implémentation d'une méthode de continuation dans un code de calcul serait réalisable, elle permettrait de connaître les valeurs propres généralisées associées au problème (5.1). Ceci permettrait en particulier de répondre à la question ouverte posée par G. DUVAUT & J.-L. LIONS [54], que nous avons rappelée à la remarque 5.2.1.
6. A plus long terme, la construction complète du diagramme de bifurcation de (5.1) - c'est à dire savoir traiter numériquement les branches après le premier point de bifurcation comme généralisation de la méthode de A. CIMETIÈRE [38] - serait le point d'orgue de cette démarche.

D'autres voies d'investigations sont possibles comme :

- la confirmation de la conjecture formulée dans [104] (et rappelée à la Remarque 3.4.3) portant sur la régularité de la frontière libre de (3.2), et annonçant la nullité de la mesure de la frontière libre sous l'hypothèse de non-dégénérescence ;
- la poursuite de l'étude des propriétés géométriques du problème de l'obstacle (3.2) dans la continuité des travaux de G. Weiss et de R. Monneau, pourrait permettre de

---

mieux cerner les phénomènes d'apparition de singularités sur la frontière libre, par exemple en classifiant les formes de cusps possibles et leur nombre, en proposant de nouvelles formules de monotonies, en étudiant la validité de Conjecture de Schaeffer pour l'opérateur bilaplacien. A plus forte raison ces questions sont totalement ouvertes pour le problème (5.1).

- l'extention des travaux esquissés au paragraphe 5.3 aux problèmes unilatéraux des plaques de Von Karman (5.1) ;
- ou encore avancer dans la compréhension de l'adaptation à (3.2) puis à (5.1) des *algorithmes de continuation par méthode de tir* dans l'esprit de ce que F. BONNANS & A. HERMANT [23] ont réalisé pour la commande optimale d'une équation différentielle ordinaire soumise à une contrainte sur l'état et sous des hypothèses sur la structure topologique de la zone de contact. Dans cette direction il serait plus satisfaisant de s'affranchir des hypothèses portant sur la géométrie de la zone de contact ;
- proposer une justification du passage « 3D au 2D » prenant en compte le contact et aboutissant à la formulation (5.1) ( inéquation  $U \geq \psi$  sur  $\Omega$  et place de  $\mu(F)$ ), comme mentionnée à la Remarque 3.1.1 dans l'esprit des travaux de A. LÉGER & B. MIARA [85].
- le vaste champ d'études des bifurcations de coques en présence de contact qui fait naturellement suite aux précédentes questions pour des inéquations variationnelles dans  $\mathbb{H}^2$ .
- les problèmes de frottement qui posent de sérieuses difficultés conceptuelles et techniques (déjà dans le cas quasi-statique en ce qui concerne l'unicité de la solution) pourraient être examinés en approfondissant les questions soulevées par nos récentes discussions avec P. BALLARD [11].

---

# Bibliographie

- [1] Adams R.A., Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Adams D.R., Hedberg L. I. Function Spaces and Potential Theory, Vol. 314, Springer, 1999.
- [3] Adams D.R., The Biharmonic Obstacle Problem with Varying Obstacles and a Related Maximal Operator, Operator theory, vol. 110, 1-12, 1999.
- [4] Adams D.R., Vandenhousten R.F., Stability for Polyharmonic Obstacle Problems with Varying Obstacles, Communications in Partial Differential Equations, Vol. 25, Issue 7/8, 559-616, (2000).
- [5] Adly S., Goeleven D., Théra M., Recession mappings and noncoercive variational inequalities, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, Vol. 26 ,n. 9, 1573-1603, (1996).
- [6] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Mathematics I : Vol. XII (1959) 623-727.
- [7] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Mathematics II : Vol. XVII (1964) 35-92.
- [8] Alinhac S., Gérard P., Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, InterEdition et Edition du CNRS (1991).
- [9] Alt H. W., Phillips D., A free boundary problem for semilinear elliptic equations, J. Reine Angew. Math., vol. 368, pp. 63-107, (1986).
- [10] Attouch H., Buttazzo G., Michaille G., Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces : Applications to PDEs and Optimization, Mps-Siam Series on Optimization, (2005).
- [11] Ballard P., Pozzolini C., Frictional contact problems for elastic membranes and plates as paradigm of Moreau's sweeping process, Proceeding CIM - Internation Conference on Mathematics and Continuum Mechanics, February 19-22, 2008, Porto, Portugal.
- [12] Benyamini Y., Lindenstrauss J., Geometric nonlinear Functional analysis, Vol. 1, American Mathematical Society Colloquium Publications 48, (2000).
- [13] Berger M.S., On von Kármán's Equations and the Buckling of thin Elastic Plate, I : The Clamped Plate, Communication on Pure and Applied Mathematics, vol. XX, 687-719, (1967).
- [14] Berger M.S., Fife P.C., von Kármán's Equations and the Buckling of thin Elastic Plate, II : Plates with General Edge Conditions, Communication on Pure and Applied Mathematics, vol. XXI, 227-241, (1968).

- 
- [15] Bezine G., Cimetiere A., Gelbert J. P., Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 21, n.12, 2189-2199, (1985).
  - [16] Blank I., Sharp Results for the Regularity and Stability of the Free Boundary in the Obstacle Problem, *Indiana Univ. Math. J.* 50, n. 3, 1077-1112, (2001) .
  - [17] Boggio T. , Integrazione dell'equazione  $\Delta^2 \Delta^2 = 0$  in un'area ellittica, *Atti. Reale. Ist. Veneto* 60, 591 - 609, (1901).
  - [18] Bonnans J.F., Cominetti R., Perturbed optimization in Banach spaces I : a general theory based on a weak directional constraint qualification, *Rapport de recherche de l'INRIA - Rocquencourt*, n. 2024, (1993).
  - [19] Bonnans J.F., Cominetti R. A. Shapiro, Second order necessary and sufficient optimality conditions under abstract constraints, *Rapport de recherche de l'INRIA - Rocquencourt*, n. 2952, (1996).
  - [20] Bonnans J.F., Shapiro A., *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer, (2000).
  - [21] Bonnans J.F., Hermant A., Stability and Sensitivity Analysis for Optimal Control Problems with a First-order State Constraint and Application to Continuation Methods, *ESAIM*, 14, 825-863, (2008).
  - [22] Bonnans J.F., Hermant A., No-gap Second-order Optimality Conditions for Optimal Control Problems with a Single State Constraint and Control. *Rapport de Recherche INRIA 5837*, (2006).
  - [23] Bonnans J.F., Hermant A., Well-posedness of the shooting algorithm for state-constrained optimal control problems with a single constraint and control, *SIAM J. on Control and Optimization*, 46(4) :1398-1430, (2006).
  - [24] A. Bonnet, R. Monneau Distribution of vortices in a type II superconductor as a free boundary problem : Existence and regularity via Nash-Moser theory, *Interfaces and Free Boundaries*, 2, 181-200 (2000).
  - [25] Brézis H., *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Masson, (1983).
  - [26] Brush D. O., Almroth B. O., *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, (1975).
  - [27] Caffarelli L.A., Compactness methods in free boundary problems, *Comm. Partial Differential Equations* 5 (4), 427-448, (1980).
  - [28] Caffarelli L.A., The obstacle problem revisited, *J. Fourier Anal. Appl.* 4, (1998), 383-402.
  - [29] Caffarelli L.A., A remark on the Hausdorff measure of a free boundary, and the convergence of coincidence sets, *Boll. Un. Mat. Ital. A* 18 (5), p. 109-113 (1981).
  - [30] Caffarelli L.A., Friedman A., The obstacle problem for the biharmonic operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 6 (4), no.1 , 151-184, (1979).
  - [31] Caffarelli L.A., Rivière N.M., Smoothness and analyticity of free boundary in variational inequalities, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 3 (4), 289-310, (1975).
  - [32] Caffarelli L. A., Rivière N. M., Asymptotic behavior of free boundaries at their singular points. *Ann. of Math*, 106, 309-317, (1977).
  - [33] Chow S.-N., Mallet-Paret J., The parametrized obstacle problem, *Nonlinear Analysis , Theory, Methods and Applications*, Vol. 4, Issue 1, Pages 73-91, (1980).
-

- 
- [34] Ciarlet P.G., A justification of the von Kármán equations. Arch. Rational. Mech. Anal. vol.73, n.4, 349-389, (1980).
  - [35] Ciarlet P.G., Rabier P., Les équations de von Kármán, Springer, Berlin, (1980).
  - [36] Ciarlet, P., Destuynder, P., Justification of the 2-dimensional linear plate model. Journal de Mécanique, Vol. 18, n. 2, 315-344, (1979).
  - [37] Cimetière A., Un problème de flambement unilatéral en théorie des plaques, Journal de Mécanique, vol.19, n. 1, (1980).
  - [38] Cimetière A., Méthode de Liapounov-Schmidt et branche de bifurcation pour une classe d'inéquations variationnelles. C. R. Acad. Sc. Paris, t.300, Série I, n. 15, (1985).
  - [39] Cimetière A., Léger. A., Un résultat de différentiabilité dans le problème d'obstacle pour des poutres en flexion, C.R. Acad. Sci., I, vol. 316, 749-754, (1994).
  - [40] Cimetière A., Hamdouni A., Millet O., An Eulerian approach of non-linear membrane shell theory, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 38, n.9, 1403-1420, (2003). Applied Mathematics and Optimization
  - [41] Cominetti R., Metric regularity, tangent sets, and second-order optimality conditions, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 21, N. 1, 265-287, (1990).
  - [42] Cominetti R., Penot J.-P., Tangent sets to unilateral convex sets, CRAS, t. 321, Série I, 1631-1636, (1995).
  - [43] Cominetti R., Penot J.-P., Tangent sets of order one and two to the positive cones of some functional spaces, Appl. Math. Optim, vol. 36, n. 3, 291-312, (1997).
  - [44] Conrad F., Perturbation de problèmes aux valeurs propres non linéaires et problèmes à frontière libre, Thèse d'état de l'Université Claude Bernard Lyon I, (1984).
  - [45] Conrad F., Issard-Roch F., Brauner C.M., Nicolaenko B., Nonlinear eigenvalue problems in elliptic variational inequalities :a local study, Communications in Partial Differential Equations, Volume 10, Issue 2, 151 - 190, (1985).
  - [46] Conrad F., Herbin R., Mittelman H. D., Approximation of obstacle problems by continuation methods, SIAM journal on numerical analysis, vol. 25, n.6, 1409-1431, (1988).
  - [47] Courant R., Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, Interscience, New-York, 1962.
  - [48] Crandall M.G., Rabinowitz P.H., Bifurcation from simple Eigenvalues, Journal of Functional Analysis, 8, 321-340, (1971).
  - [49] Crandall M.G., Rabinowitz P.H., Bifurcation, Perturbation of simple Eigenvalues, and Linea rized Stability, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 52, N.2, (1973).
  - [50] Do C., Problèmes de valeurs propres pour une inéquation variationnelle sur un cône et application au flambement unilatéral d'une plaque mince, C.R.A.S., Série A, t. 280, 45-48, (1975).
  - [51] Do C., The Buckling of A Thin Elastic Plates Subjected to Unilateral Conditions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 503, Springer, Berlin, (1976).
  - [52] Do C., Bifurcation Theory for Elastic Plates Subjected to Unilateral Conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60, 435-448, (1977).
  - [53] Duvaut G., Lions J.L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).
  - [54] Duvaut G., Lions J.L., Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques, (I) Le cas stationnaire 143, Journal de Mécanique, 13 n.1, 51-74, (1974).
-

- 
- [55] Dunford N, Schwartz J-T, Linear Operators. Part I : General Theory, Classics Library Edition, Wiley, New York, (1988).
  - [56] Fernandes L., Figueiredo I., Judice J., On The Solution of a Finite Element Approximation of a Linear Obstacle Plate Problem *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 27-40, Vol.12, No.1, (2002).
  - [57] Figueiredo F., Leal C., Sensitivity Analysis of a Nonlinear Obstacle Plate Problem, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, January, Vol. 7, 135-155, (2002).
  - [58] Frehse J., On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality, *Manuscripta Math.*, 9, (1973), 91-103.
  - [59] Friedman A., variational principles and free boundary problems, Pure and Applied mathematics, ISSN 0079-8185, a Wiley-Interscience publication, (1982).
  - [60] A. Friedman A., Phillips D., The free boundary of a semi-linear elliptic equation, *Trans. Amer. Math. So.*, vol. 282, n. 1, , 153-182, (1984).
  - [61] Federer A., Geometric measure theory, Springer-Verlag, (1969).
  - [62] Haraux A., How to differentiate the projection on a convex set in Hilbert space ? Some applications to variational inequalities, *J. Math. Soc. Japan*, 29, (1977), 615-631.
  - [63] Hadamard J., Sur certains cas intéressants du problème biharmonique, *Atti IV Congresso* (1908). Reprinted in Hadamard J., *Oeuvres*, CNRS, Paris, 3, 1297-1299, (1968).
  - [64] Hamilton R.S, The inverse function theorem of Nash and Moser, *Bull. A.M.S.*, 7, (1982), 65-222.
  - [65] Hebey E., Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Diderot éditeur, arts et sciences, Paris, France (1997).
  - [66] Herbin R., Approximation numérique d'inéquations variationnelles non linéaires par des méthodes de continuations, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon, (1986).
  - [67] Hermant A., Homotopy Algorithm for Optimal Control Problems with a Second-order State Constraint, Rapport de recherche INRIA n. 6626, (2008).
  - [68] Holmes R.B., Smoothness of certain metric projections on Hilbert spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184 (1973), 87-100.
  - [69] Garabedian P.R., A partial differential equation arising in conformal mapping, *Pacific J. Math* 1, 485 - 524, (1951).
  - [70] Gerhardt C., Regularity of solutions of nonlinear variational inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 52 (1973), 389-393.
  - [71] Gilbarg D., Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, (1998).
  - [72] Goeleven D., Nguyen V.H., Thera M., Nonlinear eigenvalue problems governed by variational inequalities of von Kármán's type : a degree theoretic approach, *Topological Methods in Non-Linear Analysis*, Vol 2, 253-276, (1993).
  - [73] Grisvard P., Elliptic problems in nonsmooth domains, Monographs and studies in mathematics, 24, Pitman, London, (1985).
  - [74] Grisvard P., Singularities in boundary value problems, Masson, (1992).
  - [75] Grunau H.-C., G.Sweers, Positivity for perturbations of polyharmonic operators with Dirichlet boundary conditions in two dimensions, *Math. Nachr.* 179, 89-102, (1996).
-



- 
- [76] Issard-Roch F., Problèmes aux valeurs propres non linéaires dans les inéquations variationnelles - Etude locale, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, (1984).
  - [77] Kato T., Schrödinger operators with singular potentials, Israel J. Math., n. 13, p.135-148, (1972).
  - [78] Kawohl B., When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex ?, Communications in partial differential equations, vol. 10, n. 10, pp. 1213-1225, (1985).
  - [79] Kawasaki H., An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second order necessary conditions for minimization problems, Mathematical Programming, 41, 73-96, (1988).
  - [80] Keller H. B., Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, Applications of Bifurcation Theory, P.H. Rabinowitz, ed., Academic Press, New York, (1977).
  - [81] Kinderlehrer D., Nirenberg L., Regularity in free boundary problems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 34, 86-119, (1978).
  - [82] Kinderlehrer D., Stampacchia G., An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York, (1980).
  - [83] Krasnosel'skii M. A., Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Ed. Pergamon, London (1963), [Translated from the Russian edition (Moscow, 1956)] .
  - [84] Landau L., Lifshitz E., Theory of Elasticity, Pergamon Press, Oxford, 1986.
  - [85] Léger A., Miara B., Mathematical Justification of the Obstacle Problem in the Case of a Shallow Shell, Journal of Elasticity, Vol. 90, n. 3, (2008).
  - [86] Le V.K., Schmitt K., Global Bifurcation in Variational Inequalities : Applications to Obstacle and Unilateral Problems, Appl. Math. Sci. 123, Springer (1997).
  - [87] Leray J., Schauder J., Topologie et Equations Fonctionnelles. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Sup., Sér. 3, n. 51., 45-78, (1934).
  - [88] Levy A.B., Sensitivity of solutions to variational inequalities on Banach Spaces, SIAM J. Control Optim., vol. 38, 50-60, (1999).
  - [89] Lewy H., Stampacchia G., On the regularity of the solution of a variational inequality, Comm. Pure and Appl. Math. 22, 153-188 (1969)
  - [90] Lions J.-L., Stampacchia G., Variational Inequalities, Communications on Pure and Applied Mathematics, XX, 493-519, (1967).
  - [91] Lions J. L., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications. Voll. I et II. Dunod, Paris (1968).
  - [92] Lions J.-L., Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Paris : Dunod : Gauthier-Villars , (1968).
  - [93] Lions J. L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod et Gauthier-Villars, (1969).
  - [94] Love A.E.H., Treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York, (1927).
  - [95] Mignot F., Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques, Journal of Functional Analysis, n. 22, vol. 2, 130-185, (1976).
  - [96] Miersemann E., Mittelmann H.D., Stability in Obstacle Problems for the von Kármán Plate. SIAM - Journal on Mathematical Analysis, vol. 23, n.5, 1099-1116, (1992).
-

- 
- [97] Monneau R., Méthodes géométriques pour les problèmes à frontières libres, note de cours de l'Ecole d'été CIMPA 2004.
  - [98] Monneau R., A Brief Overview on the Obstacle Problem, in Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona, (2000) : Progress in Mathematics. Vol 202, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 303-312 (2001).
  - [99] Monneau R., On the Number of Singularities for the Obstacle Problem in Two Dimensions, Journal of Geometric Analysis, 13 (2), 359-389, (2003).
  - [100] Monneau R., Dolbeault J., Estimations de convexité pour des équations elliptiques non-linéaires et application à des problèmes de frontière libre, C.R.A.S. Paris, t. 331, Série I, p. 771-776, (2000).
  - [101] Paumier J.-C., Le problème de Signorini dans la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love, C. R. A. S. Paris, Ser. 1, vol. 335 (2002) 567-570.
  - [102] Potier-Ferry M., Sur un système rencontré en théorie des plaques, C.R.A.S., Paris, t.280, A, 1385-1387, (1975).
  - [103] Pozzolini C., Léger A., Sur la zone de contact entre une plaque élastique et un obstacle rigide, C. R. A. S. Paris, Mécanique, 335, (2007).
  - [104] Pozzolini C., Léger A., A Stability Result Concerning the Obstacle Problem for a Plate, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, (2008).
  - [105] Rabinowitz P.H., Some global results for nonlinear eigenvalue problems, Journal of Functional Analysis, 7, 487-513, (1971).
  - [106] Rao M., Sokolowski J., Polyhedricity of Convex Sets in Sobolev Spaces  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ , Nagoya Math. J., vol.130, (1993),101-110.
  - [107] Rao M., Sokolowski J., Directional Differentiability of Metric Projection in  $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$  and Applications, Nagoya Math. J., vol.130, (1993),101-110.
  - [108] Recke L., Eisner J., Kucera M., Smooth bifurcation for variational inequalities based on the implicit function theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 275, Number 2, 615-641, (2002).
  - [109] Recke L., Eisner J., Kucera M., Smooth continuation of solutions and eigenvalues for variational inequalities based on the implicit function theorem, J. Math. Anal. Appl. 274, No. 1, 159-180, (2002).
  - [110] Recke L., Eisner J., Kucera M., Smooth dependence on parameters of solutions and contact regions for an obstacle problem, J. Math. Anal. Appl. 288, 462-480, (2003).
  - [111] Recke L., Eisner J., Kucera M., Smooth bifurcation for an obstacle problem, Differential and Integral Equations, Vol. 18, n. 2, 121-140, (2005).
  - [112] Recke L., Eisner J., Kucera M., Direction and stability of bifurcation branches for variational inequalities Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 301, n.2, 276-294, (2005).
  - [113] Rodrigues J.F, Obstacle problems in mathematical physics, North-Holland, (1987).
  - [114] Shapiro, A., Sensitivity Analysis of Nonlinear Programs and Differentiability Properties of Metric Projections, SIAM J. Control and Optimization, vol. 26, pp. 628-645, (1988).
  - [115] Shapiro A., Sensitivity analysis of parameterized variational inequalities, Mathematics of Operations Research, vol. 30, pp. 109 - 126, (2005).
  - [116] Schaeffer D.G., An Exemple of Generic Regularity for Non-Linear Elliptic Equation, Arch. Rat. Mach. Anal. 57, (1974), 134-141.
-

- 
- [117] Schaeffer D.G., A stability theorem for the obstacle problem, *Advances in mathematics* 16, 34-47, (1975).
  - [118] Schaeffer D.G., The capacitor problem, *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 24, n. 12, 1143-1167 (1975).
  - [119] Schaeffer D.G., Some exemples of singularities in free boundary, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 4 (4), 131-144, (1976).
  - [120] Schild B., A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (1984), 87-122.
  - [121] Schild B., On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 13, (1986), 558-616.
  - [122] Schwartz J., On Nash's implicit functional theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* 13, (1960), 509-530.
  - [123] Sergeraert F., Une généralisation du théorème des fonctions implicites de Nash, *C. R. A. S. Paris, Sér.I*, 270, (1970), 861-863.
  - [124] Sergeraert F., Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Ser.5*, 4, (1972), 599-660.
  - [125] Sergeraert F., Une extension d'un théorème de fonctions implicites de Hamilton, *Mémoires de la S.M.F*, tome 46, (1976), 163-171.
  - [126] von Kármán T., Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Enzyklopedie der Mathematischen Wissenschaften*, IV/4(C), 311-385, (1910).
  - [127] Weiss, G.S. A homogeneity improvement approach to the obstacle problem. *Inventiones Mathematicae*, vol. 138, issue 1, pp. 23-50, (1999).
  - [128] Zarantonello E., Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory, *Contribution to Nonlinear Functional Analysis*, 27 Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, 237-424, (1971).

---

# ANNEXES



## Annexe A

# Douceur & Théorème de Nash-Moser

Le Théorème de Nash-Moser, dont nous avons besoin s'énonce dans des espaces de Fréchet-doux, aussi nous rappelons ci-dessous le cadre nécessaire à son bon emploi. Les références sont [8], [64] et [12].

### A.0.1 Cadre

**Définition A.0.1** Une semi-norme sur un espace vectoriel  $E$  est une application  $\mathbf{s} : E \longrightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \mathbf{s}(x) \geq 0 \quad \forall x \in E; \\ (ii) & \mathbf{s}(x+y) \leq \mathbf{s}(x) + \mathbf{s}(y) \quad \forall x, y \in E; \\ (iii) & \mathbf{s}(\lambda x) = |\lambda| \mathbf{s}(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Une norme est donc une semi-norme avec la condition supplémentaire que  $\left[ \mathbf{s}(x) = 0 \iff x = 0 \right]$ .

**Définition A.0.2** Un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable (elcm) est un espace vectoriel muni d'une suite  $(\mathbf{s}_i)_i$  croissante de semi-normes telles que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{s}_i(x) = 0 \implies x = 0.$$

**Proposition A.0.1** (i) - Un espace vectoriel topologique localement convexe un espace vectoriel  $E$  muni d'une topologie séparée  $\mathfrak{T}$  rendant continues les opérations  $\left[ (x, y) \mapsto x + y \right]$  et  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ , et pour laquelle tout point admet un système fondamental de voisinages convexes.

(ii) - La topologie associée à une semi-norme est une topologie d'espace localement convexe.

(iii)- Réciproquement, toute topologie localement convexe sur  $E$  est associée à une suite de semi-normes.

**Définition A.0.3** Un espace de Fréchet est un espace localement convexe métrisable qui est complet pour la structure d'espace métrique induite.

---

**Remarque A.0.1** Rappelons qu' : « *un espace vectoriel topologique est un espace normé si et seulement si il est localement convexe et localement borné* ». Si bien que ce qui manque à un espace de Fréchet pour être de Banach est d'être localement borné.

**Exemples A.0.1** (1) Tout espace de Banach est un espace de Fréchet.

(2) L'espace  $C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$  des fonctions indéfiniment dérivables ayant toutes comme support un compact  $K$  fixé de  $\mathbb{R}^n$ , est un espace de Fréchet pour la suite de semi-normes :

$$s_p(f) := \sup_{x \in K, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha f(x)|.$$

(3) Soit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide (ie leur produit par un polynôme quelconque est borné). C'est un espace de Fréchet lorsqu'on le munit de la famille de semi-normes suivante :

$$s_p(f) := \sup_{|\beta| \leq p} \|x^\beta \partial^\alpha f(x)\|_\infty.$$

(4) Par contre l'espace des fonctions tests (de Schwartz)  $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ , n'est pas métrisable et donc, en particulier, **n'est pas un espace de Fréchet**.

**Remarque A.0.2** Il faut bien noter que toute tentative de généralisation brutale du théorème d'inversion locale classique (i.e banachique) à un espace de Fréchet est forcée d'avorter... Pour illustrer notre propos voici un contre-exemple (parmi de nombreux) qu'Hamilton fournit dans [64] :

$$\text{Soit } \Theta : C^\infty([-1, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty([-1, 1], \mathbb{R}), \quad \Theta(f) = f - xff'.$$

Alors  $\Theta$  est régulière et sa dérivée est donnée par :

$$D\Theta(f)h = h - xhf' - xfh'.$$

En  $f = 0$ ,  $D\Theta(0)h = h$ , c'est à dire  $D\Theta(0) = \text{Id} =$  l'identité ...

**MAIS** :  $D\Theta(f)$  n'est pas inversible pour  $f$  arbitrairement proche de 0.

**Définition A.0.4** Un espace de Fréchet-doux (ou bon espace de Fréchet, de l'anglais "tame Frechet space") est un espace de Fréchet dont la topologie peut être définie par une suite croissante de normes :

$$\left( \|\cdot\|_i \leq \|\cdot\|_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \right);$$

De plus  $\mathbf{E}$  doit être muni d'une famille à un paramètre  $t$  d'opérateurs d'approximations  $\Pi_t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  vérifiant :

$$\exists r \in \mathbb{N} \quad t.q. : \begin{cases} si \quad (i \geq j) & , \quad \exists c_{(i,j)} > 0 & \|\Pi_t(x)\|_i \leq c_{(i,j)} t^{i-j+r} \|x\|_j \\ si \quad (i \leq j) & , \quad \exists C_{(i,j)} > 0 & \|x - \Pi_t(x)\|_i \leq C_{(i,j)} t^{i-j+r} \|x\|_j \end{cases} \quad (\text{A.2})$$



---

**Définition A.0.5** Soient  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}'$  deux variétés éventuellement à bord. Une application  $\phi : tC^\infty(\mathbf{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathbf{M}')$  est dite  $C^0$  – *douce* sur un ouvert  $\mathbf{U} \subset C^\infty(\mathbf{M})$  si elle est continue et vérifie l'inégalité *douce* suivante pour un  $\alpha \in ]0, 1[$  tout  $u \in \mathbf{U}$

$$\exists r \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists c_{k+r} > 0 / \forall u \in U : \|\phi(u)\|_{k+r+\alpha} \leq c_{k+r} \left(1 + \|u\|_{k+r+\alpha}\right).$$

$\phi$  est dite  $C^\infty$  – *douce* si  $D^j \phi$  est  $C^0$  – *douce* pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Ici  $(\|\cdot\|_{k+r+\alpha})$  désigne une échelle de normes Hölderiennes de plus en plus régulières.

**Exemples A.0.2** (1) Les espaces de Hölder  $C^{n,\alpha}(\Omega)$  sont des espaces de Fréchet-doux.

(2) Si  $M$  est une variété compacte, avec ou sans bord, alors  $C^\infty(M)$  est un bon espace de Fréchet.

## A.0.2 Énoncé des théorèmes

**Remarque A.0.3** Contrairement au classique théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach, ici nous devons imposer dans les espaces de Fréchet-doux l'inversibilité de l'application linéaire  $D\Psi(u)$  sur tout un voisinage du point  $u^\circ$  (et non seulement au point  $u^\circ$  comme le montre [64] sur un contre-exemple). En voici l'énoncé précis :

**Théorème A.0.1** (THÉORÈME D'INVERSION LOCALE DE NASH-MOSER VERSION  $C^\infty$ , [64]) Soient  $M$ ,  $N$  deux  $C^\infty$ -variétés éventuellement à bords. Si  $\Psi : \mathbf{U} \subset C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(N)$  de classe  $C^\infty$ -douce, et si  $\forall u \in \mathbf{U}$  voisinage de  $u^\circ$ , et  $\forall v \in C^\infty(N)$ ,  $D\Psi(u).w = v$ , avec  $w = \left(D\Psi(u)\right)^{-1}.v$ , et  $\left(D\Psi(u)\right)^{-1}$  de classe  $C^\infty$ -douce en les variables  $(u, v)$ , alors  $\Psi$  est localement inversible d'inverse  $\left(\Psi\right)^{-1}$ .

L'énoncé ci-dessous est le théorème 3.3.1 page 212-213 de [64] donné par R. Hamilton.

---

**Théorème A.0.2** (THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES D'HAMILTON-NASH-MOSER [64] ) Soient  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  trois espaces de Fréchet-doux et  $\mathcal{O} \subset \mathbf{F} \times \mathbf{G}$  un ouvert. Soit  $\mathbf{T} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{H}$  une application  $C^\infty$  – *douce* telle que sous la contrainte

$$\mathbf{T}[f, g] = 0$$

$\partial_f \mathbf{T}[f, g]$  soit *surjective*.

On suppose de plus qu'il existe une application  $\ell(f, g)h$  linéaire en  $h$  telle que

$$\ell : \mathcal{O} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{F}$$

qui soit une *approximation linéaire à erreur quadratique*  $Q$  de l'inverse à droite de  $\partial_f \mathbf{T}[f, g]$  pour tout  $(f, g) \in \mathcal{O}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ , i.e. il existe une application  $Q[f, g](h, k)$  bilinéaire en  $h$  et  $k$  telle que :

$$Q : \mathcal{O} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{F}$$

vérifiant :

$$\partial_f \mathbf{T}[f, g] \ell(f, g)h = h + Q[f, g](h, k)(\mathbf{T}[f, g], h).$$

Si

$$\mathbf{T}[f^\circ, g^\circ] = 0$$

alors il existe des voisinages ouverts  $\mathcal{V}(f^\circ)$  de  $f^\circ$ ,  $\mathcal{W}(g^\circ)$  de  $g^\circ$  t.q. l'équation  $\mathbf{T}[f, g] = 0$  soit  $C^\infty$ -résoluble, pour tout  $g \in \mathcal{W}(g^\circ)$ .

## Annexe B

# Différentiabilité d'un projecteur sur un convexe polyédrique d'un espace de Hilbert

L'intérêt considérable porté en analyse variationnelle, aux propriétés de Fréchet, Gâteaux ou conique différentiabilité de l'opérateur de projection sur un convexe d'un espace de hilbert (ou plus généralement de la fonction distance à un fermé) tient en grande partie au fait qu'elles ont de nombreuses applications dans les questions d'optimisation sous contrainte(s). Bien souvent l'absence de connaissances sur les propriétés de régularité de la distance à un ensemble admissible, qui apparait dans beaucoup de problèmes de contrôle optimal, et contournée en « pénalisant », et en faisant des calculs sur le problème non contraint, le souci étant que les justifications de la légitimité de telles procédures sont rares et difficiles.

**Définition B.0.6** Soit  $\mathbb{K}$  un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ , on appelle projecteur sur  $\mathbb{K}$ , la fonction,  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$ , définie, pour tout  $u^b \in \mathbb{H}$ , par

$$\|u^b - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^b)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|u^b - v\|_{\mathbb{H}} \quad (\text{B.1})$$

On appelle inéquation variationnelle le problème suivant :

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ / } \langle \mathbf{H}(u), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (\text{B.2})$$

avec  $\mathbf{H} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}^*$  une fonction continuellement différentiable.

**Objectif :** Nous nous intéressons à la sensibilité de la projection orthogonale de  $u_t^b = u_0^b + th \in \mathbb{H}$  sur  $\mathbb{K}$

$$\text{Val}(u_t) := \|u_t - u_t^b\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|u_t^b - v\|_{\mathbb{H}}, \quad (\text{B.3})$$

Sa solution est notée  $u_t := \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u_t^b)$ , et sa fonction valeur optimale  $\text{Val}(u_t) := \inf_{v \in \mathbb{K}} \frac{1}{2} \|u_t^b - v\|_{\mathbb{H}}^2$ . Le lagrangien associé est  $\mathcal{L}(v, \mu, u_t^b) := \frac{1}{2} \|u_t^b - v\|_{\mathbb{H}}^2 + \langle \mu, v \rangle_{\mathbb{H}}$

**Commentaires B.0.1** Il est bien connu, que l'opérateur  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$  est 1-lipschitzien et donc est, au moins sur un espace de Hilbert séparable, Gâteaux-différentiable presque partout (cf. le Théorème C.0.8), alors qu'il est toujours différentiable en les points de son image.

Plusieurs auteurs se sont employés à comprendre comment les propriétés de différentiabilité d'un projecteur  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$  sur un convexe fermé non vide  $\mathbb{K}$  d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$  dépendent de la régularité du bord de  $\mathbb{K}$ . Ainsi R.B. HOLMES [68], a montré que si le bord de  $\mathbb{K}$  est de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), alors  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}} \in C^{k-1}(\mathbb{H} \setminus \mathbb{K})$ . La situation se complique grandement pour des convexes non-réguliers.

**Définition B.0.7** • *Le cône de support<sup>1</sup> d'un convexe fermé  $\mathbb{K}$  d'un espace de Banach  $\mathbf{X}$  en un point  $u \in \mathbb{K}$  est le plus petit cône convexe de sommet l'origine contenant  $\mathbb{K} - u$ , nous le désignons par*

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\} = \bigcup_{t>0} t(\mathbb{K} - u).$$

- *Le cône tangent<sup>2</sup> à  $\mathbb{K}$  en  $u$ , noté  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$ , est l'adhérence de  $\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)$  dans  $\mathbf{X}$  fort.*
- *Nous appelons cône critique à  $\mathbb{K}$  en  $u$  associé à l'inéquation variationnelle (B.2) l'ensemble*

$$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*),$$

$$\ker(u^*) := (\mathbf{H}(u))^{\perp} := \{h \in \mathbf{X} / \langle \mathbf{H}(u), h \rangle = 0\}$$

- *Le cône normal à  $\mathbb{K}$  en  $u$ , est :*

$$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in \mathbf{X}^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}.$$

**Définition B.0.8** • *Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique en  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,*

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

*On dit que  $\mathbb{K}$  est polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .*

**Commentaires B.0.2** Si  $\mathbb{K}$  est un cône de sommet l'origine, alors pour  $u \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbb{K} + \text{Vect}(u)$ . Cette notion de cône polyédrique est la généralisation du cône polyédral (voir figure B) en dimension finie. Le cône critique associé à (B.1) est  $\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap (\text{Vect}(u - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u)))^{\perp}$ .

**Définition B.0.9** Soient  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  deux espaces de Banach.

- *Une fonction  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  continue au voisinage de  $x$  encore  $f$  est directionnellement différentiable en  $x$  dans la direction  $h \in \mathbf{X}$  si la limite (en  $t > 0$ ) suivante existe :*

$$f'(x; h) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

<sup>1</sup>Il s'agit du cône des déplacements cinématiquement admissibles dans  $\mathbb{K}$  à partir de  $u$ ; on l'appelle aussi *cône radial* à  $\mathbb{K}$  en  $u$ .  
2

**Remarque B.0.4** Dans [20] le cône tangent est défini plus généralement dans un espace de Banach pour un ensemble  $\mathbb{K}$  quelconque sous la forme  $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) = \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u)/t = \{h \in \mathbf{X} / \text{dist}(u + th, \mathbb{K}) = o(t), t \geq 0\}$ . Rappelons la définition des limites inférieure et supérieure d'une famille d'ensembles (au sens de Painlevé-Kuratowski)  $\mathbf{A}_t$  d'un espace de Banach  $\mathbf{X}$  (indexés par  $t$  qui peut être un nombre réel ou plus généralement un élément d'un espace métrique) :

$$\begin{cases} \liminf_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}_t := \{x \in \mathbf{X} / \liminf_{t \rightarrow t_0} [\text{dist}(x, \mathbf{A}_t)] = 0\}, \\ \limsup_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}_t := \{x \in \mathbf{X} / \limsup_{t \rightarrow t_0} [\text{dist}(x, \mathbf{A}_t)] = 0\}. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

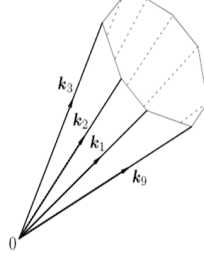


FIG. B.1 – Cône polyédrique convexe pointé engendré par les combinaisons linéaires positives des vecteurs :  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_9$ . Les demi-droites supportées par ces vecteurs constituent les rayons extrêmes de la carcasse du cône.

• La fonction  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  est dite *coniquement différentiable* (ou *directionnellement différentiable*) en  $x$  s'il existe une application positivement homogène  $\mathbf{d}^+ f(x) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ , appelée *dérivée conique* (ou *C-dérivée* (à droite)), vérifiant la propriété :

$$\forall h \in \mathbf{X}, \forall t > 0, \quad / f(x + th) = f(x) + t\mathbf{d}^+ f(x)(h) + o(t, h), \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|o(t, h)/t\|_{\mathbf{Y}} \rightarrow 0. \quad (\text{B.5})$$

C'est à dire que  $f$  est directionnellement différentiable en  $x$  pour toutes directions  $h \in \mathbf{X}$ , et  $\mathbf{d}^+ f(x) :=: f'(x; \cdot)$ .

**Commentaires B.0.3** Il est à noter que l'opérateur  $\mathbf{d}^+$  n'est pas nécessairement linéaire ! Rappelons que  $f$  est dite Gâteaux-différentiable en  $x$  si  $f$  directionnellement différentiable en  $x$  et si  $h \mapsto f'(x; h)$  est linéaire continue, i.e. est l'opérateur  $\mathbf{d}^+ f(x) :=: f'(x; \cdot)$  est linéaire continu. Nous notons cet opérateur  $Df(x)$ , i.e.  $Df(x)(h) = Df(x; h) = f'(x; h)$ .

**Remarque B.0.5** Il a été établi par E. ZARANTONELLO [128], que  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}$  admet une C-dérivée en tout point  $u \in \partial\mathbb{K}$ , pourvu que  $\mathbb{K}$  soit d'intérieur non vide, i.e

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th) = u + t\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u)h + o(t, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall t > 0.$$

Mais en général, sans hypothèse supplémentaire, il existe des exemples de non dérivabilité directionnelle d'un projecteur métrique, même en dimension finie ! Voir l'exemple 3.31 donné dans [20] page 166, pour  $\mathbb{H} := \mathbb{R}^2$ . Cette difficulté peut-être contournée grâce au théorème suivant établi par A. Haraux :

---

**Théorème B.0.3** [62] Soit  $\mathbb{K}$  un convexe **polyédrique** d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Alors  $\forall u, h \in \mathbb{H}$  la courbe  $t \mapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th)$  est coniquement différentiable en 0, et  $\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbf{pr}_{\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}$ , c'est à dire

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th) = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) + t \mathbf{pr}_{\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}(h) + o(t, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall t > 0. \quad (\text{B.6})$$

**Remarque B.0.6** Soulignons que la dérivée conique du projecteur  $\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbf{pr}_{\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}$  est une dérivée au sens de Gâteaux si et seulement si  $\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u)$  est un espace vectoriel.

**Théorème B.0.4** [62] Soit  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert réticulé, avec  $\mathbb{K} = \{h \in \mathbb{H} / h \geq 0\}$  fermé. Notons  $[h]_+ = \sup\{h, 0\}$ . S'il existe  $M > 0$  telle que  $\|[h]_+\|_{\mathbb{H}} \leq M \|h\|_{\mathbb{H}}, \quad \forall h \in \mathbb{H}$  alors le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique.

**Corollaire B.0.1** • Le cône convexe  $\mathbb{K} := \{v \in L^p(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$  est polyédrique.

- Le cône convexe  $\mathbb{K} := \{v \in C^0(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$  est polyédrique.
- Le convexe  $\mathbb{K} := \{v \in \mathbb{H}_g^1(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$  est polyédrique.
- Mais le cône convexe  $\mathbb{K} := \{v \in C^1(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$  n'est pas polyédrique<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Car le maximum de deux fonctions différentiables peut ne pas être différentiable.

## Annexe C

# Applications lipschitziennes & Propriété de Radon-Nikodym (PRN)

Nous donnons ici quelques propriétés sur les applications lipschitziennes dans les espaces de Banach, selon la référence [12].

**Théorème C.0.5** (H. RADEMACHER (1919)) Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction lipschitzienne, avec  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $f$  est presque partout Fréchet-différentiable<sup>1</sup> sur  $U$ .

**Théorème C.0.6** (F. MIGNOT (1976)) [95] • *Toute application lipschitzienne définie sur un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  à valeurs dans un espace de Hilbert séparable est Fréchet-différentiable presque partout.*

• *Toute application lipschitzienne définie sur un ouvert  $U \subseteq \mathbb{H}_1$  d'un Hilbert séparable à valeurs dans un Hilbert séparable  $\mathbb{H}_2$  est Gâteaux-différentiable aux points d'un ensemble dense.*

**Commentaires C.0.4** Il faut toutefois prendre garde au fait que la propriété de différentiabilité d'une application lipschitzienne n'est pas *générique* au sens que l'ensemble sur lequel elle est différentiable n'est pas un  $G_\delta$ <sup>2</sup>, (voir l'exemple donné dans [95]).

**Remarque C.0.7** La définition usuelle de la propriété de Radon-Nikodym porte sur les mesures vectorielles et la possibilité d'étendre le théorème de Radon-Nikodym. Néanmoins, une autre définition sera plus utile dans nos applications. C'est pourquoi on la définira comme suit :

**Définition C.0.10** Soit  $X$  un espace de Banach. On dit que  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym (PRN), si toute application lipschitzienne  $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$  est presque partout dérivable.

**Théorème C.0.7** • *Tout dual séparable a la PRN.*

• *Tout espace de Banach réflexif a la PRN.*

---

<sup>1</sup> Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $f$  une application continue d'un voisinage de 0 dans  $X$  à valeurs dans  $Y$ .

►  $f$  est différentiable au sens de Fréchet en 0 s'il existe  $L \in \mathcal{L}^*(X, Y)$  tel que  $\|f(x) - f(0) - L(x)\| = o(x)$ .

►  $f$  est différentiable au sens de Gâteaux en 0 s'il existe  $L \in \mathcal{L}^*(X, Y)$  tel que  $\forall x \in X, t \in \mathbb{R}, \|f(tx) - f(0) - tL(x)\| = o(t)$ .

<sup>2</sup> On appelle  $G_\delta$  une intersection dénombrable d'ouverts, et  $F_\sigma$  une réunion dénombrable de fermés. Attention!!! Un  $G_\delta$  n'est pas en général un ouvert, et un  $F_\sigma$  n'est pas en général un fermé...

---

**Exemples C.0.3** Les espaces  $L^p(\Omega)$  ont la PRN pour  $1 < p < \infty$ , mais  $L^1(\Omega)$  n'a pas la PRN.

**Remarque C.0.8** On rappelle la notion d'ensemble nul donnée dans [12] qui est l'analogue de celle d'ensemble négligeable utilisée en dimension finie. Il y a plusieurs manières de définir cette notion (cf le chapitre 6 de [12]), mais la définition suivante est la plus commode pour nous :

**Définition C.0.11** Soient  $X$  un espace de Banach et  $\mathcal{N}$  une famille de boréliens de  $X$ .  $\mathcal{N}$  est dite famille nulle (et ses éléments ensembles nuls) si :

- (i)  $\mathcal{N}$  est stable par union dénombrable
- (ii) Soit  $A$  un borélien de  $X$ . Si il existe un sous-espace de dimension finie  $X_0$  de  $X$  tel que  $(A + x) \cap X_0$  soit un sous-espace de  $X_0$  de mesure nulle pour tout  $x$  de  $X$  alors :  $A \in \mathcal{N}$ .
- (iii) Les ensembles de  $\mathcal{N}$  sont d'intérieurs vides.
- (iv) Si  $X_0 \subset X$  et  $\dim X_0 < \infty$  alors on a :  $(A \in \mathcal{N}) \iff ((A + x) \cap Y \text{ sous-espace de } X_0 \text{ de mesure nulle})$ .

► On dira alors qu'une fonction vérifie une propriété presque partout si elle la vérifie partout sauf sur un ensemble nul.

**Remarque C.0.9** On admet l'existence de telles familles dans un Banach séparable quelconque. Pour des exemples de telles familles, on consultera [12].

**Théorème C.0.8** (ARONSZAJN, CHRISTENSEN, MANKIEWICZ (1973)) Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $Y$  un espace de Banach ayant la PRN. Alors toute application lipschitzienne d'un ouvert  $U \subseteq X$  dans  $Y$  est Gâteaux-différentiable presque partout.



## Annexe D

# Formule de Levi-Civita & Opérateur de Laplace-Beltrami

On rappelle quelques définitions et propriétés élémentaires de géométrie riemannienne selon [65]<sup>1</sup>.

**Définition D.0.12** Soit une variété lisse  $\Omega$ . Pour chaque  $x \in \Omega$ , on définit une métrique riemannienne comme la donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent  $T_x(\Omega)$  et qui dépend de manière  $C^\infty$  du point de base  $x \in \Omega$ .

**Commentaires D.0.5** Dans  $\mathbb{R}^n$ , on sait calculer la différentielle d'un champ de vecteurs  $X$  en un point  $x \in \mathbb{R}^n$ . C'est une application linéaire

$$DX : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, Y \longmapsto D_Y(X)$$

$D_Y(X)$  qu'on appelle la jacobienne de  $X$ . Elle vérifie les relations suivantes :

$$D_X(Y) - D_Y(X) = [X, Y] \text{ et } X \cdot \langle Y|Z \rangle = \langle D_X(Y)|Z \rangle + \langle Y|D_X(Z) \rangle,$$

pour tous champs de vecteurs  $X, Y, Z$  et  $\langle .|. \rangle$  désignant le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $[\cdot, \cdot]$ , le crochet usuel des champs de vecteurs. Sur une variété différentielle  $\Omega$ , on ne sait pas, en général, dériver un champ de vecteur car il faut pour cela effectuer des opérations linéaires sur des vecteurs appartenant à des espaces vectoriels différents. Pour remédier à ce problème, il faut se donner arbitrairement une connexion linéaire, (i.e. « une manière de relier entre eux ») des espaces tangents voisins. Ceci revient à définir une dérivée covariante, notion qui généralise celle de jacobienne.

Rappelons que l'espace vectoriel  $\Gamma(T(\Omega))$  des champs de vecteurs d'une variété  $\Omega$  de classe  $C^\infty$ , est une algèbre de Lie pour crochet usuel. Et que les champs de vecteurs d'une variété  $\Omega$  sont les sections du fibré vectoriel  $T(\Omega) \mapsto \Omega$ , avec  $T(\Omega) = \bigcup_x T_x(\Omega)$ .

**Définition D.0.13** Une dérivée covariante sur l'espace des champs de vecteurs  $\Gamma(T(\Omega))$  est une application bilinéaire

$$\Gamma(T(\Omega)) \times \Gamma(T(\Omega)) \ni (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y \in \Gamma(T(\Omega))$$

---

<sup>1</sup> Pour plus de détail, on pourra consulter :

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J. Riemannian geometry. Universitext. Springer- Verlag, Berlin, third edition, (2004).  
Lang S., Fundamentals of differential geometry, volume 191 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, (1999).

qui vérifie :

$$\nabla_{f(X)}Y = f\nabla_XY,$$

et la *formule de Lévi-Civita*

$$\nabla_X(fY) = (X \cdot f)Y + f(\nabla_XY)$$

pour tout  $X, Y \in \Gamma(T(\Omega))$  et  $f \in C^\infty(\Omega)$ <sup>2</sup>. Cette dérivée covariante sur  $\Gamma(T(\Omega))$  est dite symétrique si :

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y].$$

**Proposition D.0.2** Sur une variété lisse  $\Omega$  munie d'une métrique riemannienne  $\mathbf{g}$ , il existe une unique dérivée covariante symétrique  $\nabla$  vérifiant :

$$X \cdot \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle_{\mathbf{g}} + \langle Y, \nabla_XZ \rangle_{\mathbf{g}}, \forall X, Y, Z \in \Gamma(T(\Omega)).$$

On l'appelle la *connexion de Lévi-Civita* (ou connexion riemannienne) de  $(\Omega, \mathbf{g})$ .

**Remarque D.0.10** Dans une carte locale  $(C, \phi)$ , les composantes de  $\nabla_XY$  s'écrivent :

$$(\nabla_XY)^k = X^i \partial_i Y^k + (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^k X^i Y^j$$

où  $X^i$  et  $Y^j$  désignent les composantes de  $X$  et  $Y$  respectivement. La connexion riemannienne  $\nabla$  est donc déterminée localement par les composantes  $\Gamma_{ij}^k$  des vecteurs  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$  appelées symboles de Christoffel. Nous pouvons les calculer en fonction des composantes  $\mathbf{g}_{ij}$  de la métrique :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\mathbf{g}^{ks}}{2} \left( \partial_i \mathbf{g}_{sj} + \partial_j \mathbf{g}_{is} - \partial_s \mathbf{g}_{ij} \right),$$

où  $\mathbf{g}^{ij}$  sont les composantes de l'inverse de la matrice des  $\mathbf{g}_{ij}$ .

**Définition D.0.14** Soit  $(\Omega, \mathbf{g})$  une variété riemannienne compacte, non nécessairement à bord et  $(C, \phi)$  une carte de  $\Omega$ . L'opérateur Laplacien-Beltrami de  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  est défini par :

$$\Delta_{\mathbf{g}}u := -\mathbf{g}^{ij} \left( \partial_{x_i, x_j}^2 u - \Gamma_{x_i, x_j}^k \partial_{x_k} u \right),$$

où les  $\Gamma_{x_i, x_j}^k$  sont les symboles de Christoffel sur  $(\Omega, \mathbf{g})$ .

**Proposition D.0.3** Soit  $(\Omega, \mathbf{g})$  une variété riemannienne compacte, non nécessairement à bord et  $(C, \phi)$  une carte de  $\Omega$ . Alors pour  $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_{\Omega} (\Delta_{\mathbf{g}}u) v d\mathbf{g} = \int_{\Omega} \langle \nabla u | \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} d\mathbf{g} = \int_{\Omega} (\Delta_{\mathbf{g}}v) u d\mathbf{g}$$

**Corollaire D.0.2** Pour tout point  $x \in C$  :

$$\Delta_{\mathbf{g}}u(x) = -\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \sum_{i,j} \partial_{x_i} u \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} \mathbf{g}^{ij} \partial_{x_j} u \right) \quad \text{si } u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}).$$

$$\Delta_{\mathbf{g}}^2 u(x) = \sum_{i,j,k,l} \partial_{x_l} \left[ \partial_{x_k} \left( -\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_{x_i} u \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} \mathbf{g}^{ij} \partial_{x_j} u \right) \right) \sqrt{\det(\mathbf{g})} \mathbf{g}^{kl} \right] \quad \text{si } u \in C^4(\Omega, \mathbb{R}).$$

<sup>2</sup>Cet opérateur s'étend de manière canonique en une loi de dérivation sur les sections de tous les fibrés tensoriels de  $\Omega$ .

## Annexe E

# Preuve de l'estimation de Schauder du Lemme 3.6.3

Les espaces de Hölder jouent un rôle prépondérant dans la preuve qui suit, il est important de rappeler quelques éléments techniques qui complètent la Proposition 3.6.3. En particulier nous précisons les notations suivantes :  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) := \{u \in C^0(\bar{\Omega}) / \|u\|_{C^{0,\alpha}} < +\infty\}$  qui est un espace Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + |u|_{\alpha;\Omega} \text{ où } |u|_{\alpha;\Omega} := \sup_{x,y \in \Omega; x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha};$$

et

$$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) := \{u \in C^m(\bar{\Omega}) / \|u\|_{C^{m,\alpha}} < +\infty\} \text{ avec } \|u\|_{C^{m,\alpha}} := \|u\|_{C^m} + \max_{|\underline{i}|=m} |\partial_{\underline{i}}^m u|_{\alpha;\Omega}$$

avec  $\|u\|_{C^m} = \sup_x \max_{|\underline{i}|=m} |\partial_{\underline{i}}^m u(x)|$  ( $= \|u\|_m$  s'il n'y a pas d'ambiguïté). Enfin  $\underline{i}$  désigne un multi-indice de la forme  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$ .

Nous rappelons le Lemme suivant prouvé dans [118] :

**Lemme E.0.1** *Soient  $\Omega$  un ouvert du plan, borné et à bord lisse, ou bien  $\Omega = \mathbb{R}^2$   $0 < \alpha < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $\tau := m + \alpha$ .*

- *Pour tout  $u \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ , il existe  $C > 0$  tel que*

$$\|u\|_{m,\alpha} \leq 2|u|_\tau + C\|u\|_0, \quad \text{avec } |u|_\tau := \max_{|\underline{i}|=m} |\partial_{\underline{i}}^m u|_{\alpha;\Omega}.$$

- *Pour tout entier naturel  $l < \tau := m + \alpha < \kappa$ , et pour tout  $u \in C^\tau(\Omega)$ , il existe  $C > 0$  tel que*

$$\|u\|_{m,\alpha} \leq C\|u\|_\kappa^q \|u\|_l^{1-q}, \quad \text{avec } q := \frac{\tau - l}{\kappa - l}.$$

- *Soit  $u \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$  et  $\tilde{u}(X) := u(X/R)$  avec  $R := (\|u\|_{m,\alpha})^{\frac{1}{m+\alpha}}$ . Alors il existe  $C > 0$  telle que*

$$(\|\tilde{u}\|_{m,\alpha} \leq C(1 + \|u\|_0)).$$

**Lemme E.0.2** Choisissons pour  $\Omega := \mathbf{H}^+$  le demi-espace positif du plan (i.e.  $\Omega := \mathbf{H}^+ = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 / X_1 > 0\}$ ) et  $\mathbf{A}$  l'opérateur bilaplacien-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2$ , dont les coefficients sont notés  $(a_i^u)_i$ . Avec les notations des théorèmes 3.6.2 et 3.6.3, posons  $\iota > 4$  non-entier, alors pour  $M' > 0$ , il existe une constante  $C' > 0$  telle que si (i) du Théorème 3.6.3 est remplacée par :

$$(i') \quad \|\mathbf{a}\|_{\max, \alpha} \leq M',$$

alors la solution de (3.53) posée sur le demi-espace positif  $\mathbf{H}^+$ , satisfait l'estimation, pour  $q = \frac{\iota}{\iota-4}$ , :

$$\begin{aligned} \|V\|_{\iota} &\leq C' \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_{\iota} + \|\varphi_2\|_{\iota} + \|V\|_{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{a}\|_{\iota-4}^q (\|F\|_{\alpha} + \|\varphi_1\|_{4+\alpha} + \|\varphi_2\|_{4+\alpha} + \|V\|_{\alpha}) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

**Preuve du Lemme E.0.2 :** ♦ Nous pouvons immédiatement nous limiter aux cas  $\varphi_1 = 0 = \varphi_2$ . Nous supposons sans perte de généralité que  $\|\mathbf{a}\|_{\iota-4} \geq 1$ , sinon (E.1) résulte du Théorème 3.6.3. Posons

$$\tilde{V}(X) := V(X/R) \text{ avec } R := (\|\mathbf{a}\|_{\iota-4})^{1/(\iota-4)}.$$

Alors  $\tilde{V}$  satisfait l'équation

$$\sum_{i \leq 4} \tilde{\mathbf{a}}_i(X) \partial_i^{|\underline{i}|} \tilde{V} = \frac{1}{R^4} \tilde{F},$$

où  $\tilde{F} := F(X/R)$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_i(X) := R^{|\underline{i}|-4} \mathbf{a}_i(X/R)$ . A présent grâce au Lemme E.0.1 nous tirons :

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{\iota-4} \leq C \left( 1 + \|\mathbf{a}\|_{\alpha} \right) \leq C \left( 1 + M \right).$$

Nous concluons par Théorème 3.6.3 (qui reste valable pour le demi-espace) :

$$\|\tilde{V}\|_{\iota} \leq C \left( \frac{1}{R^4} + \|\tilde{F}\|_{\iota-4} + \|\tilde{V}\|_{\alpha} \right).$$

Puisque  $R \geq 1$ , nous savons que :

$$\|V\|_{\iota} \leq R^{\iota} \|\tilde{V}\|_{\iota} \leq C \left( R^{\iota-4} \|\tilde{F}\|_{\iota-4} + R^{\iota} \|\tilde{V}\|_{\alpha} \right) \quad (\text{E.2})$$

En vertu du Lemme E.0.1, il vient :

$$\|\tilde{F}\|_{\iota-4} \leq 2 \|\tilde{F}\|_{\iota-4} + C \|\tilde{F}\|_{\alpha}.$$

Or  $\|\tilde{F}\|_{\alpha} = \|F\|_{\alpha}$  et par homogénéité  $\|\tilde{F}\|_{\iota-4} = R^{-(\iota-4)} \|F\|_{\iota-4}$ . En resubstituant dans (E.2) nous trouvons finalement :

$$\|V\|_{\iota} \leq R^{\iota} \|\tilde{V}\|_{\iota} \leq C \left( \|\tilde{F}\|_{\iota-4} + R^{\iota} \left[ \|\tilde{F}\|_{\alpha} + \|\tilde{V}\|_{\alpha} \right] \right),$$

ce qui complète la preuve du Lemme E.0.2. ♦

Nous pouvons maintenant achever la preuve du Lemme 3.6.3. Commençons par observer que sous les hypothèses du Lemme 3.6.3 avec  $4 < \kappa < 5$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que la solution de (3.38) :

$$\|V\|_\kappa \leq C \left( \|F\|_{\kappa-4} + \|\varphi_1\|_\kappa + \|\varphi_2\|_\kappa \right). \quad (\text{E.3})$$

En effet, les coefficients  $(a_i^u)_i$  du bilaplacien-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2$  vérifient (3.67) donc en particulier pour  $u \in \mathcal{O}''' := \{u \in C^5(\Gamma^\circ) / \|u\|_{\alpha 0} < \eta, \|u\|_5 < 1\}$  nous avons :

$$\|a_i^u\|_{\kappa-4} = \|a_i^u\|_1 \leq C(1 + \|u\|_5) \leq 2C.$$

De plus il est facile de trouver  $M$  satisfaisant aux hypothèses du Théorème 3.6.3, et donc

$$\|V\|_\kappa \leq C \left( \|F\|_{\iota-4} + \|\varphi_1\|_\iota + \|\varphi_2\|_\iota + \|V\|_0 \right),$$

d'après la Remarque 3.6.3 nous pouvons éliminer la norme  $\|V\|_0$ . Comme les estimations intérieures de  $U$  ne posent pas de problème, nous nous focalisons sur le bord. Nous voyons (grâce à la compacité) qu'il suffit d'estimer  $V$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  d'un point quelconque de  $\Gamma^u$ . Pour ce faire nous allons opérer par induction, en commençant par (E.4). Nous choisissons une suite de fonctions plateaux  $(\zeta_k)_k$  telle que  $\zeta_k \equiv 1$  sur  $\text{Supp}(\zeta_{k+1}) \cup \mathcal{V}$ . Et nous considérons une application

$$\Phi : K := \text{Supp}(\zeta_1) \longrightarrow \mathbf{H}^+ \text{ (le demi espace) telle que } K \cap \Gamma^\circ \longrightarrow \partial \mathbf{H}^+.$$

Et par le Lemme (E.0.3) ci-dessous nous obtenons :

$$\|\zeta_{k+1}V\|_\kappa \leq C \left[ \|\zeta_kV\|_{\kappa-1} + \|u\|_{\kappa+4} \left( \|F\|_\alpha + \|\varphi_1\|_{\alpha+4} + \|\varphi_2\|_{\alpha+4} \right) + \|\varphi_1\|_\kappa + \|\varphi_2\|_\kappa \right],$$

qui permet de mener l'induction aboutissant à l'estimation voulue.

Remarquons que si  $f \in C^\tau(K)$  est à support compact, alors il existe une fonction  $g \in C^\tau(\mathbf{H}^+) \cap \text{Im}(\Phi)$  telle que  $f = g \circ \Phi$ . De fait  $\|f\|_\tau$  et  $\|g\|_\tau$  sont des normes équivalentes, que nous ne distinguerons pas.

**Lemme E.0.3** Soient  $\zeta$  et  $\zeta'$  deux fonctions plateaux telles que  $\zeta \equiv 1$  sur  $\text{Supp}(\zeta')$  et  $K := \text{Supp}(\zeta)$  pouvant être envoyé sur  $\mathbf{H}^+$  avec  $\Phi(K \cap \Gamma) \subset \partial \mathbf{H}^+$ . Alors pour tout  $\kappa > 4$  il existe une constante  $C > 0$ , dépendante de la fonction plateau et de  $\kappa$  mais pas de  $V$ , telle que la solution de (3.53) posée sur  $\Omega^\circ$  un domaine plan borné à bord lisse, avec  $\mathbf{A}$  l'opérateur bilaplacien-Beltrami  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2$ , satisfasse :

$$\|\zeta'V\|_\kappa \leq C \left( \|\zeta'V\|_{\kappa-1} + \|u\|_{\kappa+4} \left( \|F\|_\alpha + \|\varphi_1\|_{\alpha+4} + \|\varphi_2\|_{\alpha+4} \right) + \|\varphi_1\|_\kappa + \|\varphi_2\|_\kappa \right). \quad (\text{E.4})$$

**Preuve du Lemme E.0.3 :** ♦ En utilisant le fait  $\zeta'V = \zeta'\zeta V$ , nous calculons  $\Delta_{\mathbf{g}^u}^2(\zeta'V) = F$  et nous trouvons en utilisant la formule dérivation d'un produit et le fait que toutes les dérivées de  $\zeta V$  sont nulles sur le support de  $\zeta'$  :

$$F = (a^u)_i \left( (\zeta V) \partial_i^4 \zeta' + 3 \partial_i^3 (\zeta V) \partial_i \zeta' + 3 \partial_i^2 (\zeta V) \partial_i^3 \zeta' + 2 \partial_i^2 (\zeta V) \partial_i^2 \zeta' + \partial_i^2 (\zeta V) \partial_i \zeta' + \partial_i (\zeta V) \partial_i^2 \zeta' + (\zeta V) \partial_i \zeta' \right). \quad (\text{E.5})$$

---

De plus  $\zeta'V$  est solution du problème aux limites

$$\Delta_{\mathbf{g}_u}^2(\zeta'V) = F \text{ sur } K, \quad \zeta'V = \zeta'\varphi_1, \quad \zeta'\partial_n V = \zeta'\varphi_2 \text{ sur } \partial K. \quad (\text{E.6})$$

Grâce à l'application  $\Phi$  nous transformons (E.5) en un problème aux limites sur  $\mathbf{H}^+$ . Notons que  $\|\zeta'\varphi_\beta\|_\tau \leq \text{Constante}\|\varphi_\beta\|_\tau$  (pour  $\beta = 1, 2$ ). Puis en vertu de la majoration (3.67) des coefficients de l'opérateur  $\Delta_{\mathbf{g}_u}^2$ , nous tirons du Lemme E.0.2 :

$$\|\zeta'V\|_\kappa \leq C \left( (\|u\|_{\kappa+4} (\|F\|_\alpha + \|\varphi_1\|_{\alpha+4} + \|\varphi_2\|_{\alpha+4})) + \|F\|_{\kappa-4} + \|\varphi_1\|_\kappa + \|\varphi_2\|_\kappa \right). \quad (\text{E.7})$$

Observons que les cinq termes de (E.7) faisant intervenir  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et  $\|F\|_\alpha$  apparaissent bien dans (E.4). Il ne reste donc plus qu'à traiter le terme de (E.7) faisant intervenir  $\|F\|_{\kappa-4}$ . De (E.5) et de l'estimation douce du produit (3.46) de la Proposition 3.6.3 nous déduisons que

$$\|F\|_{\kappa-4} \leq C \left[ \|a^u\|_0 \|\zeta'V\|_{\kappa-1} + \|\zeta'V\|_3 \|a^u\|_{\kappa-4} \right],$$

puisque la norme  $\|a^u\|_{\max, \alpha}$  est bornée (par hypothèse) et que tous ces derniers termes apparaissant dans l'estimation souhaitée, ceci achève la preuve.  $\blacklozenge$

## Annexe F

# Bifurcations d'inéquations variationnelles dans les espaces de Hilbert

Une bifurcation est par définition la perte d'unicité de la solution d'un problème aux limites. Ce phénomène est connu en mécanique sous le vocable de *flambement*. D'un point de vue statique et pour les systèmes conservatifs, cette notion de bifurcation est détectée par la présence des « points critiques ». Nous allons commencer par décrire les conditions nécessaires pour l'existence de points de bifurcations, puis nous présenterons une procédure de *linéarisation* de (F.2) dans le but d'obtenir une inéquation variationnelle homogène. En outre, nous rappellerons comment le degré topologique d'une branche solutions de (F.2) permet d'en repérer les points de bifurcations.

### F.1 Théorème d'inversion locale & points réguliers

Soit  $X, Y$  deux espaces de Banach. Considérons la fonction  $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , l'équation :

$$f(u, \lambda) = 0 \tag{F.1}$$

Soit  $(\lambda_0, u_0)$  une solution de (F.1). Dans le cas bilatéral représenté par (F.1) on veut décrire l'ensemble des solutions voisine de  $(\lambda_0, u_0)$ . Le théorème d'inversion locale, assure que si  $\partial_u f(\lambda_0, u_0)$  est un isomorphisme de  $X$  sur  $Y$  alors  $(\lambda_0, u_0)$  est un *point  $(\lambda)$ -régulier*. C'est à dire qu'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $(\lambda_0, u_0)$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $\lambda_0$  et une unique application, de classe  $C^k$ ,  $\Theta : \lambda \longmapsto u(\lambda)$  telle que  $u(\lambda_0) = u_0$  et  $(\lambda, u(\lambda))$  soit l'unique solution dans  $V$  de (F.1). Du coup, autour d'un point régulier  $(\lambda_0, u_0)$ , l'ensemble de solutions de (F.1), est un arc  $(\lambda, u(\lambda))$  ayant la régularité de  $f$ , admettant un paramétrage de la forme :

$$\lambda = \lambda_0 + t, \quad u(\lambda) = u_0 + tu'(\lambda_0) + t\varepsilon(t); \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0 \text{ dans } X.$$

Si  $\partial_u f(\lambda_0, u_0)$  n'est pas un isomorphisme de  $X$  sur  $Y$  alors  $(\lambda_0, u_0)$  est un *point  $(\lambda)$ -singulier*. Dans ce cas la paramétrisation par  $\lambda$  n'est généralement pas possible.

## F.2 Position du problème dans le cas unilatéral

• Soit  $\mathbb{K}$  un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert (réel)  $\mathbb{H}$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Supposons que  $0 \in \mathbb{K}$ . Soit  $\mathbf{B} : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$ , une application complètement continue. Considérons l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}(u, \lambda)). \end{array} \right. \quad (\text{F.2})$$

sous l'hypothèse  $\mathbf{B}(0, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , i.e. (F.2) admet pour solution la solution triviale  $u = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Cependant, il se peut naturellement qu'il existe des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles (F.2) ait d'autres solutions que 0 qui sont appelées dans ce cas des « solutions non-triviales ».

• Le problème que nous souhaitons explorer peut s'énoncer comme suit :

*Etudier l'existence, le comportement local et global, des solutions non triviales de (F.2) quand le paramètre  $\lambda$  varie.*

**Définition F.2.1**  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  est appelé *point de bifurcation* de (F.2) s'il existe une suite  $(u_n, \lambda_n)_n$  de solutions de (F.2), telles que  $\|u_n\| \neq 0, \forall n$ , et  $(u_n, \lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, \lambda_0)$ .

• Supposons que l'opérateur  $\mathbf{B}$  admette une dérivée partielle par rapport à  $u$  en  $u = 0$ , i.e. qu'il existe une application complètement continue<sup>1</sup>

$$\mathbf{L} : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$$

telle que pour toutes suites  $(v_n), (\lambda_n), (\tau_n)$  satisfaisant

$$v_n \rightarrow v, \lambda_n \rightarrow \lambda, \tau_n \rightarrow \tau \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ et } \tau_n > 0, \forall n$$

$$\frac{1}{\tau_n} \mathbf{B}(\tau_n v_n, \lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{L}(v, \lambda), \text{ dans } \mathbb{H}. \quad (\text{F.3})$$

Alors l'opérateur  $\mathbf{L}(\cdot, \lambda)$  est positivement homogène de degré 1.

• Introduisons maintenant, l'inéquation conifée homogène associée à (F.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{L}(u, \lambda) | v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{L}(u, \lambda)). \end{array} \right. \quad (\text{F.4})$$

**Définition F.2.2** Nous appelons  $\lambda \in \mathbb{R}$  une *valeur propre* de (F.4), si (F.4) admet  $(u, \lambda)$  pour solution avec  $u \in \mathbb{K} - \{0\}$ , et  $u$  est appelé *vecteur propre* de (F.4) associé à  $\lambda$ .

**Remarque F.2.1** De l'homogénéité de  $\mathbf{L}$ , il vient que si  $u$  est solution de (F.4), alors  $\tau u$  l'est encore, pour  $\tau \geq 0$ . Ainsi si pour tout  $\tau > 0, \tau u$  est un vecteur propre si  $u$  en est un. Ces notions généralisent celles d'analyse spectrale du cas bilatéral  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ .

---

<sup>1</sup>Définition (J. LERAY (1950)) : Une application linéaire  $l : E \rightarrow F$  entre espaces vectoriels topologiques est dite *complètement continue* s'il existe un voisinage  $V_0$  de l'origine tel que  $l(V_0)$  soit relativement compact dans  $F$ .



### F.3 Solution équation, solution inéquation pure & point de transition

**Définition F.3.1** On dit qu'une solution  $(\lambda, u)$  de (F.2) est une *solution équation* (resp. une *solution inéquation pure*) si  $u = \mathbf{B}(u, \lambda)$  sur  $\Omega$ , (resp. si  $(\lambda, u)$  n'est pas solution de  $u = \mathbf{B}(u, \lambda)$  sur tout  $\Omega$ ).

**Remarque F.3.1** Dans de nombreuses situations l'inéquation (F.2) admet une branche de solutions équations et une branche de solution inéquation; ces deux branches étant connectées par un point dit de *transition équation-inéquation*. Nous donnons une définition plus précise de ce type de point, pour en faire une étude locale à son voisinage.

**Définition F.3.2** On dit qu'une solution  $(\lambda_t, u_t)$  de (F.2) est un point de *transition équation-inéquation* si quelque soit le voisinage  $V$  de  $(\lambda_t, u_t)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ , il existe  $(\lambda_1, u_1) \in V$  une solution équation de (F.2) et il existe une solution  $(\lambda_2, u_2) \in V$  solution d'inéquation pure de (F.2).

**Remarque F.3.2** La définition précédente implique que si  $(\lambda, u)$  est un point de transition de (F.2), alors  $(\lambda, u)$  est une solution équation de (F.2).

### F.4 Résultats de bifurcations globales à la Crandall-Rabinowitz

Les travaux de J. LERAY & J. SCHAUDER [87] généralisent aux espaces de Banach la notion de degré topologique introduite en dimension finie par L. Brouwer. Le Théorème suivant décrit ces propriétés générales :

**Théorème F.4.1** Soient  $X$  un Banach et

$$A = \{(Id - f, \Omega, y), \text{ ouvert borné de } X, f : \overline{\Omega} \longrightarrow X \text{ compacte}, y \notin (Id - f)(\partial\Omega)\},$$

alors il existe une unique application appelée **dégré de Leray-Schauder**

$$\mathbf{deg} : A \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (Id - f, \Omega, y) \longmapsto \mathbf{deg}(Id - f, \Omega, y)$$

vérifiant :

1. (normalisation)  $\mathbf{deg}(Id, \Omega, y) = 1$ , pour tout  $y \in \Omega$ ;
2. (additivité) Si  $(Id - f, \Omega_1 \cup \Omega_2, y) \in A$  et  $\Omega_1, \Omega_2$  sont des ouverts disjoints de tels que  $y \notin (Id - f)(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , alors

$$\mathbf{deg}(Id - f, \Omega_1 \cup \Omega_2, y) = \mathbf{deg}(Id - f, \Omega_1, y) + \mathbf{deg}(Id - f, \Omega_2, y),$$

3. (invariance par homotopie) Si  $h : [0, 1] \longrightarrow X$  est compacte et  $y : [0, 1] \longrightarrow X$  continue vérifie  $\forall t \in [0, 1], y(t) \notin (Id - h(t, \cdot))(\partial\Omega)$ , alors  $\mathbf{deg}(Id - h(t, \cdot), \Omega, y)$  est indépendant de  $t \in [0, 1]$ .
4. Si  $(Id - f, \Omega, y) \in A$  et  $\mathbf{deg}(Id - f, \Omega, y) \neq 0$ , alors il existe  $x \in \Omega$  tel que

$$x - f(x) = y.$$

5. Le degré ne dépend que des valeurs de la fonction sur  $\partial\Omega$ .

Le degré de Leray-Schauder permet d'établir des théorèmes de point de fixes, servant à montrer l'existence de solution d'Equations Elliptiques non Linaires. En particulier D. GOELEN, V.H. NGYEN, M. THERA [72], et V.K. LE & K. SCHMITT [86] ont prouvé le résultat sur les bifurcations globales d'inéquations variationnelles suivant :

**Théorème F.4.2** Avec les notations et les hypothèses de la section précédente, nous avons :

(i) Si  $(0, \lambda_0)$  est un point de bifurcation de (F.2), alors  $\lambda_0$  est une valeur propre de (F.4).

(ii) Si  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) ne sont pas des valeurs propres de (F.4) et si

$$\deg(Id - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{L}(\cdot, a), \mathbb{B}(0, r), 0)) \neq \deg(Id - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{L}(\cdot, b), \mathbb{B}(0, r), 0))$$

pour  $r > 0$ , et pour  $\mathbf{C}$  composante connexe de  $\mathbf{S}$  contenant  $\{0\} \times [a, b]$ , avec

$$\mathbf{S} := \overline{\{(u, \lambda) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} / (u, \lambda) \text{ solution de (F.2) avec } u \neq 0\}} \cup (\{0\} \times [a, b])$$

alors ou bien :

►  $\mathbf{C}$  est non-bornée dans  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ ,

ou bien

►  $(0, \lambda_1) \in \mathbf{C} \cap (\{0\} \times \mathbb{R} \setminus [a, b]) \neq \emptyset$ , pour  $\lambda_1 \notin [a, b]$  valeur propre de (F.4).